Suites du type $u_n = a\,n^2 + bn + c$

Le but de cet exercice est de conjecturer des propriétés sur les suites u définies de la façon suivante , pour tout entier n, $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$ où a, b, c sont des réels donnés.
On définit les suites v et w de la façon suivante :
Pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = u_n - u_{n-1}$
Pour tout entier $n \geq 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$

A l'aide du tableur, afficher les 50 premières valeurs des suites u, v, w dans les 7 cas suivants.

- Dans A1, taper a, dans A2 mettre la première valeur de a indiquée ci-dessous.
- Dans B1, taper b, dans B2 mettre la première valeur de b indiquée ci-dessous.
- Dans C1, taper c, dans C2 mettre la première valeur de c indiquée ci-dessous
- Faire une colonne avec la valeur de l'indice n dans la colonne D.
- Dans la colonne E, afficher les valeurs approchées des 50 premiers termes de la suite u.
- Dans la colonne F, afficher les valeurs approchées des termes de la suite v.
- Dans la colonne G, afficher les valeurs approchées des termes de la suite w.
- Effectuer 7 affichages <u>les uns après les autres.</u>
- Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur la suite v ?

Conjectures : Nature de la suite v

a	b	c
2	2	1
2	2	0
2	0	1
2	0	0
3	2	1
-5	2	1
1	2	1

1) Dans le cas général, démontrer vos conjectures.
2) Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite u ?

<u>Réciproque :</u>
Nous avons démontré qu'une suite u définie, pour tout entier naturel n, par :
$u_n = a\,n^2 + b\,n + c$ où a, b, c sont des réels donnés,vérifie la relation de récurrence suivante :
pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1} + 2a\,n + b - a$ et $u_0 = c$.
La réciproque est –elle vraie ?
Soit u une suite définie par récurrence de la façon suivante : $u_n = u_{n-1} + d\,n + e$ u_0, où u_0 d et e sont des réels donnés.
Existe-t-il des réels a, b, c tels que, pour tout entier n, $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$?

1) <u>Etude d'un exemple</u> : Soit u la suite définie,pour tout $n > 0$, par $u_n = u_{n-1} + 2\,n - 13$ et $u_0 = 0$
   a) S'il existe des réels a, b, c tels que , pour tout n, $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$, quelles sont nécessairement ces valeurs a, b, c ?
   b) Valider ces résultats à l'aide du tableur.
   c) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout n,
   $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$ avec les valeurs de a, b, c déterminées à la question a)

2) <u>Cas général</u> : On adopte la même démarche. Soit u la suite définie par $u_n = u_{n-1} + d\,n + e$ u_0, où u_0 d et e sont des réels donnés.
   a) S'il existe des réels a, b, c tels que , pour tout n, $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$, quelles sont nécessairement ces valeurs a, b, c ?(a, b, c sont fonction de d, e, u_0)
   b) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout n,
   $u_n = a\,n^2 + b\,n + c$ avec les valeurs de a, b, c déterminées à la question a)

Commentaires :

-