

Comparaison du précodeur Max- d_{\min} avec les OSTBC et le précodeur Max-SNR pour les systèmes MIMO

Baptiste VRIGNEAU¹, Philippe ROSTAING¹, Ludovic COLLIN², Koffi YAO¹

¹LEST UMR-CNRS 6165

6 Av. Le Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest Cedex 3, France

²E3I2 ENSIETA

2 rue Francois Verny 29806 Brest Cedex 09

¹prenom.nom@univ-brest.fr, ²ludovic.collin@ensieta.fr

Résumé – Nous avons comparé trois techniques de transmission permettant d'obtenir l'ordre de diversité maximal d'un système MIMO : le précodeur Max- d_{\min} , le précodeur Max-SNR et le code d'Alamouti. Les deux précodeurs se distinguent par la nécessité de connaître l'état du canal à l'émission contrairement au code spatio-temporel en bloc. Pour ce faire, nous avons simulé les trois méthodes en utilisant un modèle de canal utilisant des antennes à polarisations orthogonales. Nous avons quantifié l'influence de cette connaissance sur le taux d'erreur binaire ainsi que l'augmentation du nombre d'antennes à la réception.

Abstract – We compared three methods which achieve the maximum diversity order in a MIMO system: the Max- d_{\min} precoder, the Max-SNR precoder and the Alamouti code. The two precoders require the channel state information contrarily to the space-time block code. With this intention, we simulated the three methods with a channel model employing dual-polarized antennas. In order to quantify the influence of this knowledge and the transmit antennas number, simulations of bit error rate are carried out.

1 Introduction

Les communications sans fil évoluent sans cesse à l'image de la norme IEEE 802.11 qui présente plusieurs versions dont les plus connues sont les normes 802.11b et 802.11g. Tout en restant compatibles, elles intègrent les nouveautés technologiques des communications numériques et notamment les systèmes multi-antennes ou MIMO (Multiple-Input Multiple Output). Ces derniers améliorent une liaison dans un environnement à trajets multiples comme un réseau sans fil domestique [1] en augmentant l'efficacité spectrale ou la robustesse de la transmission. Par exemple, le multiplexage spatial (MS) permet une augmentation significative de l'efficacité spectrale [2]. D'autres systèmes comme les codes spatio-temporel en bloc orthogonaux ou OSTBC (Orthogonal Space-Time Block Code) et le précodeur maximisant le rapport signal sur bruit (RSB) post-traitement noté Max-SNR améliorent la fiabilité de la transmission. Cette robustesse se traduit par un ordre de diversité maximal. Pour un canal de Rayleigh, sa valeur est $n_T \times n_R$, produit du nombre d'antennes à l'émission avec celui à la réception et correspond à la pente de l'asymptote de la probabilité d'erreur à fort RSB. Ces schémas sont basés sur deux stratégies différentes. Le système OSTBC introduit de la redondance en transmettant plusieurs combinaisons de symboles utilisant plusieurs périodes symbole [3][4]. Cette solution n'exige pas de connaissance du canal au niveau de l'émetteur notée Tx-CSI (Channel State Information) mais diminue l'efficacité spectrale par rapport au MS. Le précodeur Max-SNR émet les symboles dans la direction la plus favorable du canal maximisant le RSB à la réception [5]. Cela implique un précodeur avec Tx-CSI. De plus, un symbole est émis pendant une période diminuant ainsi

l'efficacité spectrale par rapport au MS.

Le précodeur Max- d_{\min} introduit récemment [6, 7] dont le principe est basé sur la maximisation de la distance euclidienne minimale entre les symboles reçus, a démontré sa capacité à améliorer à la fois l'efficacité spectrale et la robustesse de la transmission [8]. Comme le Max-SNR, l'information du canal est nécessaire à l'émission.

De plus, nous considérons un modèle de système utilisant des antennes polarisées prenant en compte la corrélation de transmission et de réception ainsi que la capacité de l'antenne à discriminer les polarisations [9].

Comme ces solutions assurent l'ordre de diversité maximal, nous nous sommes intéressés aux bénéfices de la connaissance du canal à l'émission (Tx-CSI) sur les performances du système en terme de probabilité d'erreur bit. Dans la partie 2 de cet article, le modèle du canal utilisé sera détaillé. Les deux parties suivantes présenteront respectivement les STBC puis les précodeurs max-SNR et Max- d_{\min} . La partie 5 étudiera l'influence du nombre d'antennes de réception et l'importance de la précision de l'estimation du canal. Enfin, nous présenterons nos conclusions.

2 Modèle du canal de propagation

2.1 Système de base

Comme présenté dans [9], le système utilise une antenne à l'émission et une antenne à la réception avec une double polarisation orthogonale. Ainsi, deux signaux peuvent être émis et reçus indépendamment, ce qui permet de voir ce système

mono-antenne comme un système MIMO avec deux antennes à l'émission et deux antennes à la réception. Cette solution permet de diminuer l'encombrement et le coût. Le modèle utilisé est un canal de Rayleigh et prend en compte les couplages introduits par les antennes et leur capacité à discriminer les deux polarisations au travers de la matrice de corrélation du canal [9]. Les éléments de la matrice du canal de base, $\mathbf{H}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} \end{pmatrix}$, sont des variables aléatoires gaussiennes complexes corrélées avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} E\{|h_{0,0}|^2\} &= E\{|h_{1,1}|^2\} = 1 \\ E\{|h_{0,1}|^2\} &= E\{|h_{1,0}|^2\} = \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ dépend de la discrimination de polarisation des antennes et du couplage entre les polarisations induit par les réflexions. Quand α tend vers 0, la discrimination entre les polarisations devient parfaite et le système peut être vu comme deux systèmes SISO (Single Input Single Output). La corrélation des éléments de $\mathbf{H}_{2 \times 2}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} t &= \frac{E\{h_{0,0}h_{0,1}^*\}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E\{h_{1,0}h_{1,1}^*\}}{\sqrt{\alpha}} \\ r &= \frac{E\{h_{0,0}h_{1,0}^*\}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E\{h_{0,1}h_{1,1}^*\}}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned} \quad (2)$$

où t est le coefficient de corrélation induit lors de la transmission et r celui de la réception. Nous supposons que $E\{h_{0,0}h_{1,1}^*\} = E\{h_{1,0}h_{0,1}^*\} = 0$. En considérant toutes ces hypothèses, la matrice de corrélation du système de base est définie par $\mathbf{R}_{\mathbf{H}_{2 \times 2}} = E\{\text{vect}\{\mathbf{H}_{2 \times 2}\} \text{vect}\{\mathbf{H}_{2 \times 2}\}^*\}$ et peut être exprimée comme :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}_{2 \times 2}} = \begin{pmatrix} 1 & r\sqrt{\alpha} & t\sqrt{\alpha} & 0 \\ r\sqrt{\alpha} & \alpha & 0 & t\sqrt{\alpha} \\ t\sqrt{\alpha} & 0 & \alpha & r\sqrt{\alpha} \\ 0 & t\sqrt{\alpha} & r\sqrt{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

où $\text{vect}(\mathbf{H}_{2 \times 2})$ est un vecteur de taille 4×1 obtenu par concaténation de chaque colonne de la matrice $\mathbf{H}_{2 \times 2}$.

2.2 Extension à plusieurs antennes

Par la suite, nous augmentons le nombre d'antennes de réception tout en gardant une seule antenne d'émission. Ainsi, nous avons un système physique SIMO (Single Input Single Output) avec une antenne d'émission et une ou plusieurs antennes de réception et, grâce à la double polarisation, un système MIMO équivalent avec deux antennes d'émission et un nombre n_R d'antennes de réception égal au double de celui du système physique.

Par souci de simplification, nous considérons que le système SIMO peut être décomposé en $n_R/2$ systèmes de base indépendants ayant les caractéristiques statistiques décrites précédemment. La matrice de corrélation est alors :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{H}} = \mathbf{I}_{n_R/2} \otimes \mathbf{R}_{\mathbf{H}_{2 \times 2}} \quad (4)$$

avec \otimes le produit de Kronecker et $\mathbf{I}_{n_R/2}$ la matrice identité de taille $n_R/2$.

3 Les codes spatio-temporels orthogonaux (OSTBC)

Pour la suite de l'article, nous fixons la puissance totale moyenne émise P_0 et supposons que l'énergie moyenne des symboles est unitaire, $E[|s_i|^2] = 1$. Le RSB est alors défini par P_0/σ^2 où σ^2 représente la variance du bruit.

Supposant un canal stationnaire sur N_P périodes symbole, un flux de n_S symboles est transmis sur les n_T antennes d'émission grâce à une matrice de code $\mathbf{C} [n_T \times N_P]$. Typiquement, les éléments de la matrice \mathbf{C} sont de la forme $\pm s_i$ ou $\pm s_i^*$. Par exemple, le célèbre code d'Alamouti [3] correspondant à $n_T = n_S = 2$ est $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} s_0 & -s_1^* \\ s_1 & s_0^* \end{pmatrix}$. La figure 1 illustre

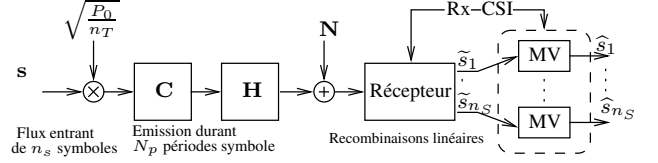


FIG. 1 – Synoptique d'une transmission OSTBC

une telle transmission. L'utilisation d'un OSTBC signifie que l'émetteur utilise N_P périodes symboles. Par conséquent, le taux de transmission est affecté par le rendement $R = n_S/N_P$ et retarde l'estimation de N_P périodes. Le signal reçu est donné par :

$$\mathbf{Y} = \sqrt{P_0/n_T} \mathbf{H} \mathbf{C} + \mathbf{N} \quad (5)$$

où $\mathbf{H} = [h_{i,j}]_{i,j=1}^{n_R, n_T} [n_R \times n_T]$ est la matrice de canal, $\mathbf{Y} [n_R \times N_P]$ est le vecteur d'échantillons reçus et $\mathbf{N} [n_R \times N_P]$ représente un bruit blanc additif gaussien temporellement et spatialement décorréolé de variance σ^2 . Un avantage important des OSTBC est la simplicité du récepteur. La première étape consiste à estimer la matrice de canal \mathbf{H} . Ensuite, les estimations des symboles peuvent être découplées grâce à l'orthogonalité du code [4]. Le critère du maximum de vraisemblance (MV) peut être appliqué à chaque symbole de la constellation \mathcal{C} :

$$\hat{s}_i = \arg \min_{s_i \in \mathcal{C}} \left| \tilde{s}_i - \sqrt{P_0/n_T} \|\mathbf{H}\|_F^2 s_i \right| \quad (6)$$

pour $i = 1, \dots, n_S$ et $\|\mathbf{H}\|_F^2 = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H) = \text{trace}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})$ désigne la norme de Frobenius au carré. Le système MIMO est équivalent à n_S voies indépendantes illustrées par la figure 2 où n_i est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 . La force des OSTBC est d'obtenir le gain $\|\mathbf{H}\|_F^2/n_T$ sur le RSB et un ordre de diversité $n_T \times n_R$ sans connaissance du canal à l'émission.

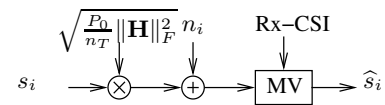


FIG. 2 – Schéma équivalent d'une transmission OSTBC

Le code d'Alamouti correspondant à notre configuration matérielle pour $n_T = 2$ offre le meilleur rendement $R = 1$.

4 Précodeur linéaire possédant l'information du canal à l'émission

4.1 Diagonalisation de la matrice canal

Les précodeurs utilisent la connaissance du canal via une matrice de précodage \mathbf{F} à l'émetteur et une matrice de décodage \mathbf{G} au récepteur. Une première opération permet de simplifier le canal en décomposant $\mathbf{F} = \mathbf{F}_v \mathbf{F}_d$ et $\mathbf{G} = \mathbf{G}_d \mathbf{G}_v$ puis

en définissant le canal virtuel $\mathbf{H}_v = \mathbf{G}_v \mathbf{H} \mathbf{F}_v$. Les matrices \mathbf{F}_v et \mathbf{G}_v permettent de blanchir le bruit et de diagonaliser le canal à l'aide de la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{H} (Figure 3). Note : dans le cas d'un bruit blanc, $E[\mathbf{nn}^*] = \sigma^2 \mathbf{I}_{n_R}$, $\mathbf{H}_v = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_b})$ où $b = \min(n_T, n_R)$ et les λ_i sont directement les valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ rangées par ordre décroissant. Le canal virtuel est représenté par b voies indépendantes avec chacune un gain donné par la valeur singulière $\sqrt{\lambda_i}$ et un bruit blanc additif de variance σ^2 .

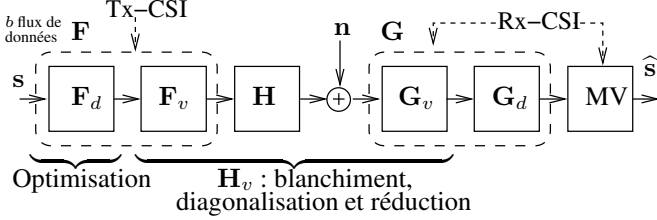


FIG. 3 – Synoptique de la diagonalisation du canal

La nouvelle relation d'entrée-sortie est :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_d \mathbf{H}_v \mathbf{F}_d \mathbf{s} + \mathbf{G}_d \mathbf{n}_v \quad (7)$$

La matrice \mathbf{G}_d n'ayant aucune influence sur la décision selon le maximum de vraisemblance est choisie égale à la matrice identité \mathbf{I}_2 . Il reste à trouver la matrice \mathbf{F}_d qui résulte de l'optimisation d'un critère à définir. Nous allons en voir deux exemples.

4.2 Optimisation au sens du RSB

Le premier précodeur Max-SNR, bien connu dans la littérature [5], maximise le RSB post-traitement. La matrice de pré-codage \mathbf{F}_d permet d'optimiser ce critère sous la contrainte de puissance $\|\mathbf{F}_d\|_F^2 = P_0$:

$$\mathbf{F}_d = \arg \max_{\mathbf{F}'_d} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}'_d\|_F^2 \quad (8)$$

Le résultat de cette optimisation donne la matrice de pré-codage :

$$\mathbf{F}_d = \sqrt{P_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Maximiser le RSB consiste donc à émettre toute la puissance sur la voie virtuelle la plus favorable correspondant à la valeur singulière la plus forte. La relation d'entrée-sortie devient :

$$y = \sqrt{P_0 \lambda_1} s + n \quad \text{avec } E[|n|^2] = \sigma^2 \quad (10)$$

4.3 Optimisation de la distance minimale

La distance euclidienne minimale d_{min} entre deux points de la constellation de réception influence les performances du système, spécialement quand un estimateur utilise le MV. Le précodeur \mathbf{F}_d maximise ce critère sous la contrainte de puissance $\|\mathbf{F}_d\|_F^2 = P_0$ selon le critère suivant :

$$\mathbf{F}_d = \arg \max_{\mathbf{F}'_d} \left\{ \min_{s_k, s_l \in \mathcal{C}^b, s_k \neq s_l} \|\mathbf{H}_v \mathbf{F}'_d (s_k - s_l)\| \right\} \quad (11)$$

Dans notre cas, $b = 2$ donnant deux valeurs propres λ_1 et λ_2 et la solution de (11) pour une MAQ-4 s'écrit [7] :

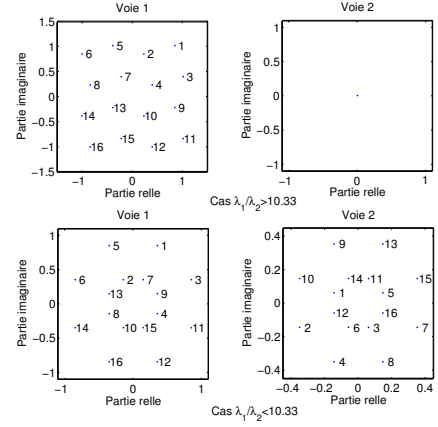


FIG. 4 – Deux types de constellation de réception optimisant d_{min} pour une modulation MAQ-4 et deux voies. Les points de la constellation sont numérotés afin d'identifier sur chaque voie les 16 vecteurs possibles.

- si $\lambda_1/\lambda_2 \geq 10.33$

$$\mathbf{F}_d = \sqrt{P_0} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} & \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} e^{j\frac{\pi}{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12a)$$

- si $\lambda_1/\lambda_2 < 10.33$

en posant $\psi = \arctan\left(\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{1}\right)$

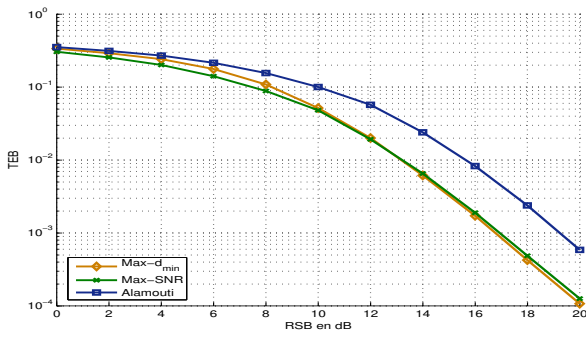
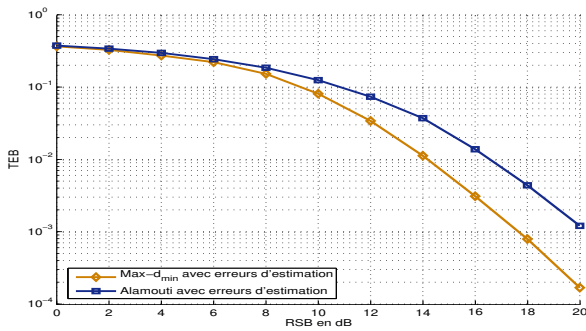
$$\mathbf{F}_d = \frac{\sqrt{P_0}}{2} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ -\sqrt{2} & 1+i \end{pmatrix} \quad (12b)$$

Le rapport des valeurs propres λ_1/λ_2 permet de choisir le précodeur. Lorsque le rapport est supérieur à 10.33, le précodeur prend la première forme (12a) et ne dépend pas des λ_i . Toute la puissance est émise sur la première voie offrant une solution proche du Max-SNR à une rotation près. Lorsque la seconde voie a un gain suffisant, $\lambda_1/\lambda_2 < 10.33$, le précodeur (12b) émet du signal sur les deux voies afin de profiter des deux gains pour optimiser d_{min} . L'expression de \mathbf{F}_d dépend alors que du rapport λ_1/λ_2 . Les constellations à la réception sont illustrées par la figure (4), en haut la solution (12a) et en bas celle de (12b).

5 Simulations du taux d'erreur binaire

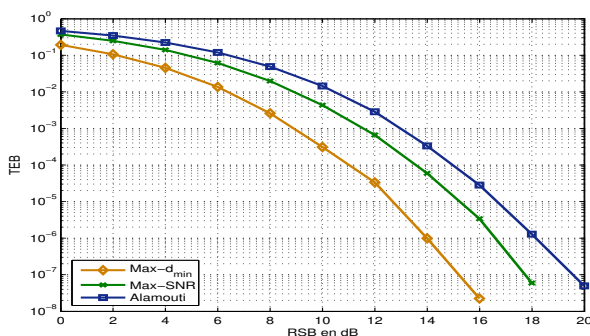
Les différentes simulations de type Monte Carlo sont obtenues en utilisant les caractéristiques statistiques d'un canal réaliste donné dans [9]. Les valeurs des paramètres définis précédemment sont $t = 0.5$, $r = 0.3$ et $\alpha = 0.4$. Le précodeur Max-SNR et le code d'Alamouti utilisent une MAQ-16 afin de maintenir la même efficacité spectrale que le précodeur Max- d_{min} .

La figure 5 donne les résultats du TEB des trois systèmes pour $n_R = 2$ correspondant à une configuration physique ne comportant qu'une seule antenne à l'émission et à la réception. Le précodeur Max- d_{min} et Max-SNR sont équivalents avec cependant un avantage au précodeur Max-SNR à faible RSB. Le code d'Alamouti accuse une perte de gain de 2 dB pour un fort RSB. Nous avons estimé l'ordre de diversité proche de 4 ($n_T \times n_R$) pour les trois cas. Rappelons que lorsque $\alpha = 0$, les termes croisés sont nuls diminuant la redondance de l'information et l'ordre de diversité. Malgré la faible valeur de α

FIG. 5 – Simulation dans un canal réaliste avec $n_R = 2$.FIG. 6 – Influence des erreurs d'estimation du canal sur le précodeur Max- d_{\min} et le code d'Alamouti dans un canal réaliste avec $n_R = 2$.

($\alpha = 0.4$), les systèmes peuvent exploiter la diversité de polarisation offerte.

Lors de l'émission, la CSI permet un gain important pour les deux précodeurs et c'est pourquoi nous avons introduit des erreurs d'estimation pour évaluer leur robustesse. L'émetteur et le récepteur utilisent une matrice d'estimation du canal, \mathbf{H}_{est} , comprenant des erreurs. Le modèle utilisé est défini par $\mathbf{H}_{est} = \mathbf{H} + \varepsilon$ où les éléments de ε sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes et de variance $1/(4RSB)$ [7]. La figure 6 présente les TEB pour $n_R = 2$ lorsque l'estimation du canal est imparfaite. Les performances du précodeur Max- d_{\min} et Max-SNR sont proches et seul le TEB du précodeur Max- d_{\min} est représenté. Une perte de 1 dB est constatée pour les trois systèmes (figures 5 et 6). Le code d'Alamouti est pénalisé autant que les autres alors qu'il n'utilise l'estimation du canal seulement qu'à la réception. La perte est due à une apparition d'interférences entre symboles.

FIG. 7 – Simulation dans un canal réaliste avec $n_R = 6$ (3 antennes physiques à double polarisation).

La valeur de n_R est augmentée à 6 correspondant à 3 antennes physiques de réception. Les résultats du TEB sont donnés sur la figure 7. Le précodeur Max- d_{\min} se distingue nettement du précodeur Max-SNR avec un gain de 3 dB pour un fort RSB. Ce gain s'explique par l'utilisation de la voie 2 avec le gain λ_2 . En effet, la statistique du rapport λ_1/λ_2 dépend du nombre d'antennes et les probabilités d'utilisation du précodeur (12b) sont $P(\lambda_1/\lambda_2 < 10.33|_{n_R=2}) = 0.01$ et $P(\lambda_1/\lambda_2 > 10.33|_{n_R=6}) = 0.44$. En supprimant λ_2 , le précodeur Max-SNR montre alors ses limites. De plus, son gain par rapport au code d'alamouti diminue de 2 dB pour $n_R = 2$ à 1.6 dB pour $n_R = 6$. Le code d'Alamouti utilise aussi la valeur propre λ_2 au travers du gain sur le RSB $\|\mathbf{H}\|_F^2/2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Finalement, seul le précodeur Max- d_{\min} utilise à la fois λ_2 et la CSI et obtient logiquement les meilleures performances.

6 Conclusion

Nous avons simulé les taux d'erreurs binaires de trois systèmes assurant un ordre de diversité maximum dont la différence majeure est la connaissance du canal à l'émission. Pour ce faire, nous avons utilisé un modèle de canal prenant en compte la diversité de polarisation et la corrélation. Pour une seule antenne physique ($n_R = 2$), le précodeur Max- d_{\min} et Max-SNR sont équivalents. Le code d'Alamouti offre une solution simple à mettre en œuvre mais accuse une perte de 2 dB sur le précodeur Max-SNR. Ce code reste un compromis intéressant pour $n_R = 2$ mais perd de son attrait lorsque ce nombre augmente. En effet, le précodeur Max- d_{\min} tire parti de toute la configuration matérielle et obtient un gain significatif de 3 dB sur le Max-SNR et près de 5 dB sur le code d'Alamouti. De plus lorsque $n_R = 2$, les trois méthodes ont la même robustesse aux erreurs d'estimation du canal que l'émetteur utilise ou non la CSI.

Références

- [1] G.J. Foschini and M.J. Gans. On limits of wireless communications in fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, 6 :331–335, 1998.
- [2] I.E. Telatar. Capacity of multi-antenna gaussian channels. *Eur. Trans. Telecommun.*, 10(6) :585–595, Nov./Dec. 1999.
- [3] S. M. Alamouti. A simple diversity technique for wireless communications. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 16 :1451–1458, Oct. 1998.
- [4] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. R. Calderbank. Space-time codes for high data rate wireless communication : Performance criterion and code construction. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44 :744–765, Mar. 1998.
- [5] P. Stoica and G. Ganesan. Maximum-SNR spatial-temporal formatting designs for MIMO channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(12) :3036–3042, Dec. 2002.
- [6] L. Collin. *Optimisation de systèmes multi-antennes basée sur la distance minimale*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, <http://www.univ-brest.fr/lest/tst>, décembre 2002.
- [7] L. Collin, O. Berder, P. Rostaing, and G. Burel. Optimal minimum distance-based precoder for mimo spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(3) :617–627, March 2004.
- [8] O. Berder, L. Collin, P. Rostaing, and G. Burel. Précodeur linéaire basé sur la distance euclidienne minimale pour les systèmes de transmission multi-antennes. *GRETSI*, 2003.
- [9] R.U. Nabar, H. Bolcskei, V. Erceg, D. Gesbert, and A.J. Paulraj. Performance of multiantenna signaling techniques in the presence of polarization diversity. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(10) :2553 – 2562, Oct 2002.