TP 5 : La ballade d'une parabole.

La courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2$ est une parabole. On va s'intéresser à l'image de cette parabole par une translation. La translation ne change pas la forme des objets : l'image d'une parabole est donc une nouvelle parabole. Ce sera la courbe représentative d'une nouvelle fonction, le but de ce travail est de déterminer cette nouvelle fonction.

<u>Quelques généralités sur Geogebra :</u>

- *Lancer geogebra,dans le menu « Affichage » faire apparaître la barre ou champ de saisie, les axes,la grille, fermer la fenêtre d'algèbre . Mettre le repère au milieu de l'écran et agrandir si besoin(dernier menu déroulant).*
- *Si vous voulez modifier les propriétés d'un objet (nombre, point, droite, cercle courbe etc..), cliquez sur cet objet, lorsque celui-ci apparaît en surbrillance, cliquez droit, vous pouvez alors le cacher, faire apparaître son étiquette, activer sa trace, le redéfinir, le renommer,l'effacer, changer son aspect etc…*
- *Point et vecteurs peuvent être créés en coordonnées cartésienne :,les noms de variable en majuscule correspondent à des points, les noms de variable en minuscule correspondent à des vecteurs, ainsi :*
  pour construire le point M de coordonnées (1, 2) ,tapez dans la barre de saisie M= (1, 2)
  pour construire le vecteur u de coordonnées (1, 2), tapez   u=(1,2).

Première partie : Etude d'un exemple.

A) Etude expérimentale.

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $u = i + 3j$.

- Dans la barre de saisie, taper $f(x) = x^2$: la courbe représentative de f apparaît, ou encore la courbe d'équation $y = x^2$.
- Créer le nombre a en le fixant égal à 1, puis créer le nombre b en le fixant égal à 3.
- Créer le vecteur $u = ai + bj$.
- Créer un point A sur la courbe de f. Construire l'image de A par la translation de vecteur u . (*Utiliser le menu déroulant)* Renommer A' l'image de A.
- Tracer le vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
- Faire bouger le point A sur la parabole.
- Activer la trace de A'*(cliquer droit sur A' et activer la trace)*
- Lorsque A bouge sur la courbe de f, A' décrit une courbe, la forme de cette courbe est-elle la même que celle de la courbe de f ?
- Désactiver la trace de A', tracer le lieu des point A' lorsque A varie. *(taper dans la barre de saisie, lieu[A',A])*. Renommer P ce lieu et colorier le, par exemple , en rouge. P est la courbe représentative d'une fonction g dont on va déterminer l'expression.

B) Etude théorique. (sur papier)

Etude du premier exemple.

Travail sur papier :

On considère la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$. On note G l'image par cette translation de la courbe représentative de la fonction f . G est la courbe représentative de la fonction g que l' on cherche à déterminer.

- Soit A un point de la courbe représentative de f, quelle relation y a-t-il entre l'abscisse et l'ordonnée de A ?
- Soit A' l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Quelles relations y a-t-il entre les coordonnées ($x_{A'}$,$y_{A'}$) du point A' et celles du point A ?
- Utiliser toutes les relations précédentes pour obtenir $y_{A'}$ en fonction de $x_{A'}$.
- En utilisant le fait que le point A' appartient à G en déduire l'équation de cette courbe sous la forme y = g(x) ?

Retour sur écran.

- Ouvrir une nouvelle fenêtre sur géogébra.
- Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- Placer un point A sur la courbe de f, et construire le point A' image de A par la translation.
- Faire bouger A, quelle est la trajectoire du point A' ? Votre démonstration est-elle validée ?

Deuxième partie : Généralisation (prolongement travail maison)

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et on va faire varier les nombres a et b.

A) Etude expérimentale. *(revenir dans la première fenêtre)*

- Dans le menu « Affichage », ouvrir la fenêtre d'algèbre. Dans cette fenêtre apparaît le nombre b. Cliquer droit sur le nombre b et modifier sa valeur b. Prendre b= 0. Quelle propriété particulière possède le vecteur u ?
- Cliquer droit sur le nombre a, cocher « afficher l'objet ». Le logiciel crée un curseur sur la figure, avec lequel vous pouvez faire varier le nombre a : pour cela, faire bouger la valeur de a sur le curseur à l'aide de la souris (cliquer tout d'abord sur la flèche déplacer). Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur le lieu des points A' ?(sa nature, son sommet, ses éléments de symétrie)
- Redéfinir a, choisir a= 0.
- De la même manière que ,pour a, afficher l'objet b pour créer un curseur.
- Faire varier b. Quelle propriété particulière possède le vecteur u ?
- Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur le lieu des points A' ? ?(sa nature, son sommet, ses éléments de symétrie)
- Faire varier simultanément a et b. Mêmes questions

B)Etude théorique. (sur papier)

On considère la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. On note G l'image par cette translation de la courbe représentative de la fonction f . G est la courbe représentative de la fonction g que l' on cherche à déterminer.

On adopte la même démarche que dans l'exemple.

En déduire l'équation de la courbe G sous la forme y = g(x) ?

Commentaires :

- *Ce TP s'inspire d'un texte de Jacques Lubczanski, mis en ligne sur le site de l'APMEP.*
- *Ce TP s'est déroulé au troisième trimestre, le chapitre sur les vecteurs venait d'être traité.*
- *L'utilisation du logiciel était devenue familière, aussi la partie expérimentale n'a pas posé de problème.*
- *La partie théorique est difficile à ce niveau. Trop souvent, les élèves se contentent de deviner l'expression de g(x)(mais font l'erreur suivante $g(x)= (x+1)^2 +3$). Le retour sur écran leur permet de détecter leur erreur. Il est alors nécessaire de donner des indications.*
- *La partie 3 n'a pas été traitée, elle est plutôt adaptée à la classe de première.*

Troisième partie :

Problème :On se donne une parabole dont on connaît l'équation. Le but de cette partie est de mettre en évidence une translation qui transforme la parabole d'équation $y = x^2$ en cette nouvelle parabole.

- Dans la barre de saisie , taper $h(x)= x^2 -2x +4$.
- Faire varier les curseurs a et b de façon que la courbe représentative de h coïncide avec l'image de la courbe de f par la translation de vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, c'est-à-dire le lieu des points A' Noter les valeurs de a et b.
- Recommencer plusieurs fois l'expérience. Noter a et b. Pouvez-vous émettre des conjectures ?
- (pour aller plus loin) Créer deux curseurs , nommer les p et q. Faire tracer la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = x^2 + p x +q$. Pour chaque valeurs de p et q, faire varier a et b pour faire coïncider le lieu des points A' et la courbe de h. (on pourra fixer q et faire varier p ou fixer p et faire varier q . Quelle conjectures pouvez-vous émettre sur les expressions de a et b en fonction de p et q ? Démontrer ces conjectures.