

TP5 : Etude d'une famille de fonctions.

Les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = xe^x$ sont les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = k e^{2x} - (x+1)e^x.$$

On note C_k la courbe représentative de f_k .

Le but de ce TP est d'étudier les variations de f_k en discutant suivant les valeurs de k , et ensuite de déterminer l'ensemble des points des courbes C_k possédant une tangente horizontale.

Conjectures émises à l'aide d'un logiciel. :

On peut représenter les courbes à l'aide par exemple des logiciels GeoGebra ou Sinequanon (logiciels libres et gratuits).

Avec le logiciel Geogebra, on peut représenter les fonctions f_k en créant un curseur, (menu angle). Ce curseur permet de définir le paramètre k . On peut alors définir dans la barre de saisie la fonction f_k . Ce logiciel calcule les fonctions dérivées d'une fonction déjà définie.

(Voir Aide)

Ce logiciel permet la construction de point sur un objet, de point intersection de deux objets (intersection de deux droites, d'une droite et d'une courbe etc..) Utiliser le menu.

Pour redéfinir un objet ou modifier les propriétés d'un objet, on clique à droite sur la souris après avoir sélectionné l'objet. (Cette commande est valable sur la plupart des logiciels)

- Représenter des courbes C_k en faisant varier les valeurs de k . Quelle conjectures pouvez-vous émettre sur les variations des fonctions f_k ?*
- Comment pouvez-vous faire apparaître les points des courbes C_k possédant une tangente horizontale ?*
- En utilisant les propriétés de ces points, faire apparaître la trace de ces points (activer trace). Ces points semblent décrire une courbe. On cherchera à déterminer l'équation de cette courbe dans l'étude ci-dessous.*

Etude de la famille de fonctions. $f_k(x) = k e^{2x} - (x+1)e^x$

1) Vérifier que :

$f'_k(x) = e^x(2ke^x - (x+2))$ on pose alors $g_k(x) = 2ke^x - (x+2)$. $f'_k(x)$ et $g_k(x)$ sont de même signe.

2) **Pour $k \leq 0$,**

- Dresser le tableau de variation de g_k (limites aux bornes et variations). En déduire le nombre de solution de l'équation $g_k(x) = 0$.
- En déduire les variations de f_k . Combien la courbe C_k possède-t-elle de tangente horizontale ?

3) **Pour $k > 0$.**

- Dresser le tableau de variation de g_k (limites aux bornes et variations).
- Vérifier que le minimum de g_k est égal à $\ln(2k) - 1$.
- Déterminer, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $g_k(x) = 0$.
- En déduire, suivant les valeurs de k , les variations de f_k . Combien la courbe C_k possède-t-elle de tangente horizontale ?

Ces résultats sont-ils cohérents avec les conjectures émises ?

4) **Ensemble des points des courbes C_k possédant une tangente horizontale.**

- Les fonctions f_k sont solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = xe^x$. A quelle courbe Γ appartiennent ces points ? (Donner son équation) (on peut vérifier avec le logiciel GeoGebra)
- Ces points décrivent-ils toute la courbe Γ ?