# DM4 :Une étude classique de suite de fonctions

On se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)$ définies sur $]0;+\infty[$ pour n entier $\geq 1$ par

$$f_n(x) = x - n - n\frac{ln(x)}{x}$$

. On note $C_n$ la courbe représentative de $f_n$

**Partie 1 : Conjectures**

1. A l'aide du logiciel géogébra, représenter les fonctions $f_n$ pour n $\in \{1;2;3;4;5\}$ (vous adapterez le repère) (imprimer cette feuille)
2. Emettre des conjectures sur les positions relatives des courbes $C_n$ et $C_{n+1}$.
3. On note $\alpha_n$ **l'abscisse du point en lequel la tangente à $C_n$ est horizontale**. Placer sur l'axe des abscisses les réels $\alpha_n$ .Expliquer votre construction. (Cacher les constructions inutiles)
   Régler le curseur pour faire varier n de 1 à 1000 et observer « la trace » des réels $\alpha_n$ . (vous pourrez utiliser le zoom pour une meilleure visualisation)
   Emettre une conjecture sur le sens de variation de la suite $(\alpha_n)$ et son comportement asymptotique.

**Partie 2 : Etude de la suite de fonctions et validité des conjectures**.

A) **Etude des positions relatives des courbes $C_n$**

1. On considère la fonction d définie sur $]0;+\infty[$ par $d(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$. Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $d(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$ . Vous remarquerez que cette différence ne dépend pas de n : Indiquer en rouge sur le graphique (feuille imprimée à la question 1) pour une valeur de x donnée ce que représente d(x).
2. Etudier les limites de d aux bornes de son domaine de définition puis les variations de la fonction d. Dresser son tableau de variation.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel $\beta$ dans l'intervalle $]0;1[$ tel que $d(\beta) = 0$. On en déterminera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
4. En déduire la position relative des courbes $C_n$ et $C_{n+1}$.
5. Démontrer que toutes les courbes $C_n$ passent par le même point B $(\beta;\beta)$ .

B) **Etude des variations des fonctions $f_n$**

1. Etudier les limites de $f_n$ en 0 et en $+\infty$ puis justifier que $C_n$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique dont vous préciserez une équation.
2. On appelle $g_n$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x) = x^2 - n + n\,ln(x)$.
   Etudier les variations de $g_n$ et calculer ses limites. **En déduire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha_n$ dans l'intervalle $[1;e]$.**
3. Vérifier que sur $]0;+\infty[$ $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$ . En déduire le tableau de variation de $f_n$.

C) **Etude de la suite $(\alpha_n)$**

1. Vérifier que pour tout n $\geq 1$ on a $g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n^{\ 2}}{n}$ . Comparer alors $g_{n+1}(\alpha_n)$ et $g_{n+1}(\alpha_{n+1})$ puis en déduire le sens de variation de la suite $(\alpha_n)$.
2. Justifier que la suite $(\alpha_n)$ est convergente et noter $\ell$ sa limite.
3. Démontrer que $\ln(\alpha_n) = 1 - \frac{\alpha_n^{\ 2}}{n}$ , justifier alors précisément la valeur de $\ell$ et valider la conjecture émise dans la partie 1.