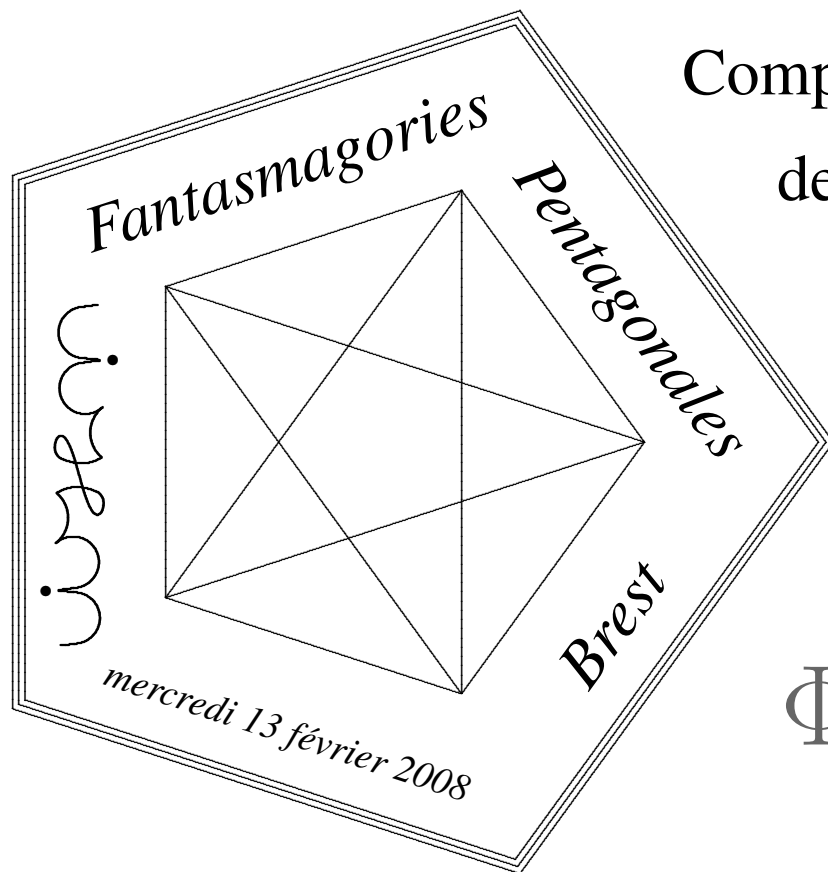




Compte rendu de l'atelier dessin lors du Colloque IREM de Brest 2008

Eric Rannou

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Texte de présentation de l'activité

Deux heures consacrées à dessiner des pentagones réguliers tous azimuts, voilà ce qui vous attend dans cet atelier. Après en avoir tracé individuellement à la règle et au compas, les pentagones réguliers seront assemblés pour former différentes figures géométriques chatoyantes.

Comme aucun prérequis mathématiques n'est nécessaire pour utiliser un compas, cette activité mathématique largement sous-tendue par un simple plaisir graphique est ouverte à tous.

Mais bien sûr qu'il faut amener son compas, sa règle et ses crayons de couleur !

Plan de l'activité

- En préambule, quelques manipulations algébriques afin de déterminer les valeurs des cosinus et sinus des angles de mesure $2\pi/5$ et $4\pi/5$.
- Dessin d'objets bidimensionnels. Trois méthodes de dessin de pentagones réguliers.
- Dessin d'objets tridimensionnels. Trois dessins de deux et même trois polyèdres réguliers admettant des axes d'ordre 5.

Détermination des cosinus et sinus des angles de mesures $2\pi/5$ et $4\pi/5$:

Soit $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ un nombre complexe de module 1 mais distinct de 1. Un tel point vérifie $1/z = \bar{z}$.

$$\begin{aligned}\frac{z^5 - 1}{z - 1} &= z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\ &= z^2(z^2 + z + 1 + \bar{z} + \bar{z}^2) \\ &= z^2((z + \bar{z})^2 - 2z\bar{z} + (z + \bar{z}) - 1) \\ &= z^2((2 \cos \theta)^2 - 2 + 2 \cos \theta - 1) \\ &= z^2((2 \cos \theta)^2 + 2 \cos \theta - 1).\end{aligned}$$

Soit $\omega = e^{\frac{i2\pi}{5}} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Pour tout k entier, soit M_k le point d'affixe w^k . Les pentagones $M_0M_1M_2M_3M_4$ et $M_0M_2M_4M_1M_3$ sont réguliers, convexe pour le premier et étoilé pour le second.

En utilisant, pour k égal à 1 ou 2, que $(\omega^k)^5 = \left(e^{\frac{i2k\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2k\pi} = 1$ et que ω^k n'est ni 1 ni 0, $2 \cos 2\pi/5$ et $2 \cos 4\pi/5$ sont racines du polynôme $X^2 + X - 1$.

Or le discriminant vaut $\Delta = 1^2 + 4 \times 1 \times 1 = 5$. Les deux racines sont opposées au signe près l'une de l'autre en effet leur produit vaut -1 . Les racines sont $-\Phi = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\Phi} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ où Φ désigne le nombre d'or.

Puisque $2\pi/5$ est compris entre 0 et $\pi/2$, ses cosinus et sinus sont positifs donc :

$$\cos 2\pi/5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin 2\pi/5 = \sqrt{1 - \cos^2 2\pi/5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

De même en remarquant que $4\pi/5$ est compris entre $\pi/2$ et π , son cosinus est négatif tandis que son sinus est positif, donc :

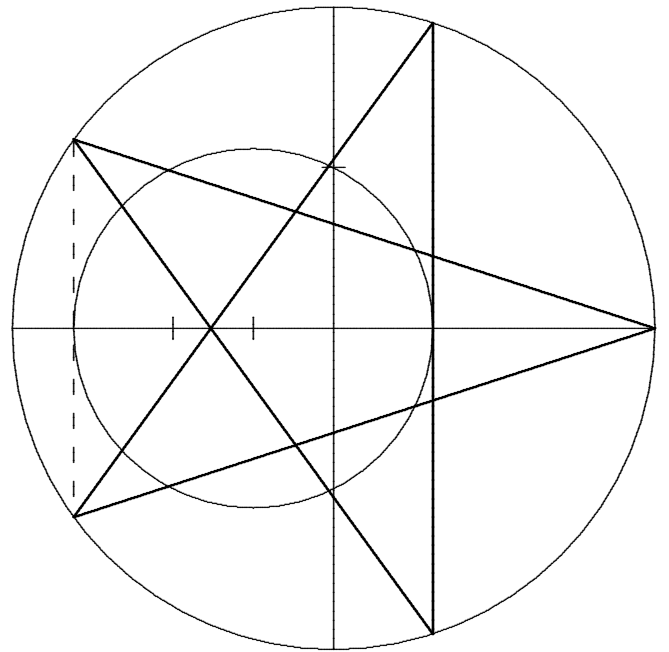
$$\cos 4\pi/5 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin 4\pi/5 = \sqrt{1 - \cos^2 4\pi/5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Maintenant que ces valeurs de cosinus, surtout, et de sinus sont établies, il devient possible de construire simplement des pentagones réguliers à la règle et au compas. La clef qui y conduit est généralement constituée par un triangle rectangle de côté adjacent à l'angle droit en rapport 1 pour 2. L'hypothénuse est alors $\sqrt{5}$ fois la longueur du plus court des côtés. La voie du cosinus est ouverte !

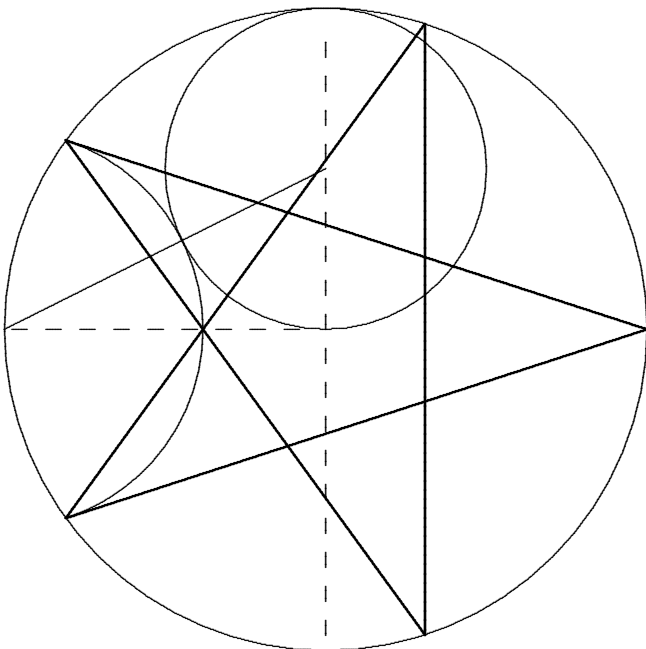
Première méthode de construction de pentagones réguliers :

Pour ne pas alourdir les figures de construction de pentagones, seule la version étoilée sera tracée. Toutes les constructions seront effectuées dans un repère orthonormé et inscrites dans le cercle unité. Le point de coordonnées $(1, 0)$ sera toujours pris comme l'un des sommets du pentagone.

Le calcul des cosinus des angles $2\pi/5$ et $4\pi/5$ montrent que les points de l'axe des abscisses de coordonnées ces deux cosinus sont diamétralement opposés sur le cercle de centre de coordonnées $(1/4, 0)$ et de rayon $\sqrt{5}/4$. Or ce cercle passe par le point de coordonnées $(0, 1/2)$ (triangle rectangle de côtés adjacents à l'angle droit de longueur $1/4$ et $1/2$). Il suffit alors de récupérer les sommets du pentagone à partir de leur projection sur l'axe des abscisses.



Deuxième méthode de construction de pentagones réguliers :



Le triangle rectangle clef est cette fois de sommets l'origine et les points de coordonnées respectivement $(0, 1/2)$ et $(-1, 0)$. Il suffit tracer deux cercles particuliers, tangents et centrés sur ces points pour déterminer deux des quatre sommets manquants du pentagone.

Le cercle de centre de coordonnées respectivement $(0, 1/2)$ et passant par l'origine a pour rayon $1/2$. Ce cercle coupe le segment joignant les deux centres $(0, 1/2)$ et $(-1, 0)$ en un point. Ce point se trouve donc à une distance $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ de $(-1, 0)$. C'est le cas aussi de deux des sommets du pentagone régulier. En effet :

$$\left(\cos 4\pi/5 - (-1)\right)^2 + \left(\sin 4\pi/5 - 0\right)^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\left(\cos 4\pi/5 - (-1)\right)^2 + \left(\sin 4\pi/5 - 0\right)^2 &= \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5} + 10 - 2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{24 - 8\sqrt{5}}{16} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Comme la construction est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, la même propriété vaut pour le sommet du pentagone de coordonnées $(\cos 6\pi/5, \sin 6\pi/5) = (\cos 4\pi/5, -\sin 4\pi/5)$.

Maintenant que la longueur du pentagone est connue, les deux sommets manquants se déduisent par simple report de cette longueur.

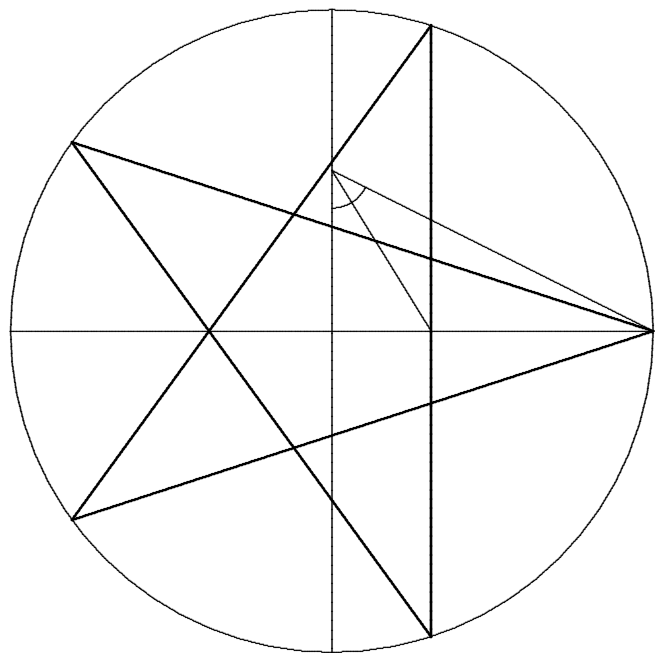
Cette construction est dans la pratique très instable et exige beaucoup de soins pour parvenir à un dessin harmonieux. L'exactitude du tracé peut être testée bien sûr en recherchant les irrégularités dans le pentagone mais aussi en sachant que les droites (M_2M_4) , (M_1M_3) et l'axe des abscisses sont concourantes en un point du cercle de centre de coordonnées $(-1, 0)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Troisième méthode de construction de pentagones réguliers :

Cette méthode est particulièrement efficace pour dessiner le pentagone régulier. Sa stabilité permet d'obtenir facilement de bons tracés.

Le triangle clef est ici de sommets l'origine et les points de coordonnées $(0, 1/2)$ et $(1, 0)$. La méthode repose sur le fait que la bissectrice au sommet de coordonnées $(0, 1/2)$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\cos 2\pi/5, 0)$. En effet :

La bissectrice a comme direction le vecteur de coordonnées $(1, -1/2) + (0, -\sqrt{5}/2)$ (diagonale d'un losange de construction). Puisque qu'elle passe par le point de coordonnées $(0, 1/2)$, elle a pour équation $(\sqrt{5} + 1)x + 2y = 1$. D'où le résultat annoncé.



Dessins de polyèdres réguliers :

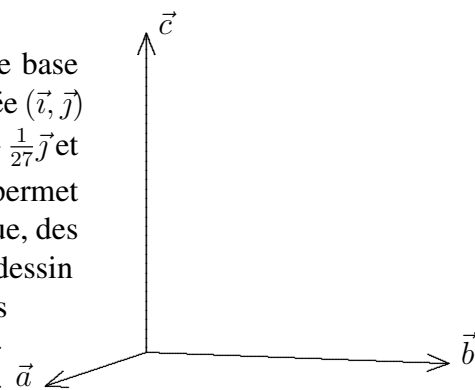
Deux polyèdres réguliers convexes admettent des axes d'ordre 5 donc des symétries pentagonales : le dodécaèdre qui a 12 faces pentagonales et l'icosaèdre qui lui a 20 faces triangulaires. L'activité s'était fixé comme but de dessiner ces deux objets avec de la craie de couleur au tableau traditionnel et avec des crayons de couleur sur des feuilles de papier.

Le choix de la projection :

Les supports recevant les futurs dessins étant bidimensionnels contrairement aux objets qui sont tridimensionnels, il était nécessaire d'opter pour une projection particulière de l'espace sur le plan. L'activité ayant un caractère vieillot à l'heure des ordinateurs, la carte de la désuétude s'imposait. Durant la seconde partie XIX^{ème} siècle, la prestigieuse *Zeitschrift für Krystallographie* comportait des myriades de magnifiques dessins de polyèdres. La plupart d'entre-eux furent réalisés en projection qualifiée ci-dessous de *Naumann* du nom d'un des éditeurs en chef de la *Zeitschrift* qui a imposé l'usage de cette projection. Les raisons de ce choix ne sont pas des plus claires. Elles diffèrent suivant les auteurs. Certains même la rejetèrent lui préférant une projection orthogonale. Ce dernier type de projection s'est substitué à la projection de Naumann début XX^{ème} comme conséquence de l'avènement de méthodes de dessin bien plus puissantes, cf. Rannou E., *Dessiner les cristaux sans ordinateur mais avec règle et compas ! Projection stéréographique et direction des arêtes*, Taol Lagad Hors-série N° 1, IREM de Brest, 2007.

Les projetés de Naumann des trois vecteurs d'une base orthonormée de l'espace dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan sont respectivement $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{9}\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \frac{1}{27}\vec{j}$ et $\vec{c} = \frac{\sqrt{10}}{3}\vec{j}$. Une construction géométrique simple permet de réaliser ses images dans le plan. Dans la pratique, des règles spéciales étaient utilisées pour accélérer le dessin et limiter les multiples reports cause d'imprécisions délétères, cf. par exemple Tutton A.E.H., *Crystallography and Practical Crystal Measurement Volume I*, Macmillan & Co., limited, London 1922,

p. 400-401. Lors de l'animation une telle règle en papier épais a été distribuée. Son dessin figure page suivante. Elle permet un report aisé des coordonnées.



Une r...

pour la p...

de Nav

Nau

1 cm

$\vec{b} = \vec{i} - \frac{1}{27}\vec{j}$

$\frac{\sqrt{73}}{9} \text{ cm}$

$\vec{c} = \frac{\sqrt{10}}{3}\vec{j}$

$\vec{c}_1^6 - \vec{c}_1^3 = \vec{p}$

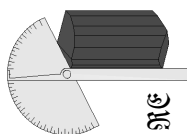
$\mathcal{M}$

$$\vec{b} = \vec{i} - \frac{1}{27}\vec{j}$$

$$\frac{\sqrt{73}}{9} \text{ cm}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{c} = \frac{\sqrt{10}}{3} \vec{j}$$



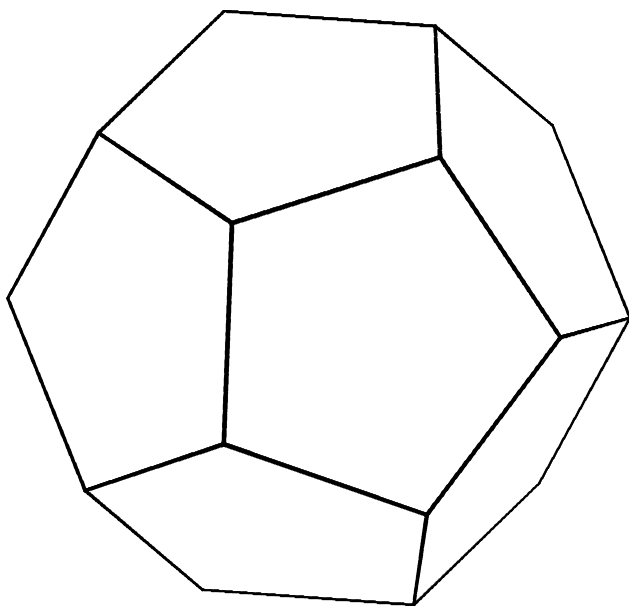
Naumann

1 cm

Le dodécaèdre régulier :

Le dodécaèdre régulier possède 20 sommets. Lors du dessin les coordonnées de chacun des sommets sont reportées à l'aide de la règle spécialisée. Il suffit donc de connaître un ensemble de coordonnées dans un repère orthonormé pour un dodécaèdre régulier. 8 sommets peuvent être choisis comme sommets d'un cube : leurs coordonnées sont par exemple $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Les 12 autres sommets peuvent avoir pour coordonnées $(\pm x, \pm y, \pm z)$ où (x, y, z) et $(0, 1/\Phi, \Phi)$ diffère d'une permutation circulaire et $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Mais 5Φ est très proche de 8 tandis que $5/\Phi$ l'est de 3. En utilisant une unité de 5 cm sur le papier et de 15 cm au tableau, la distorsion due à l'emploi de coordonnées entières approximatives est quasiment imperceptible. Le dessin peut être alors réalisé très rapidement.

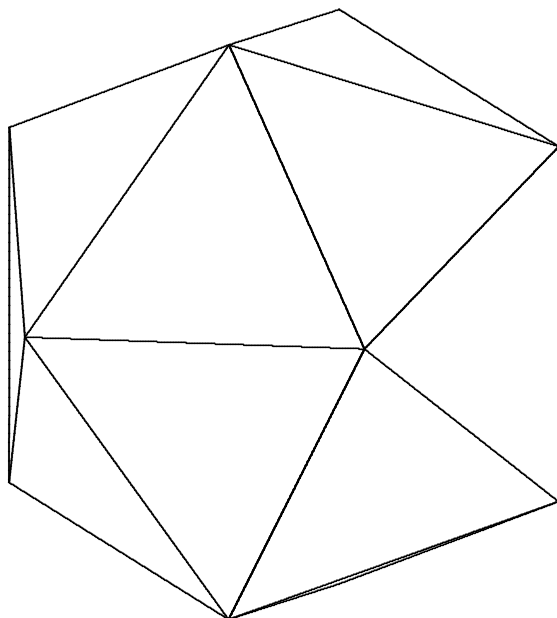


L'icosaèdre régulier :

La même démarche a été utilisée pour l'icosaèdre qui possède 12 sommets. Cette fois les coordonnées sont égales à $(\pm x, \pm y, \pm z)$ où (x, y, z) et $(0, 1, 1/\Phi)$ diffère d'une permutation circulaire.

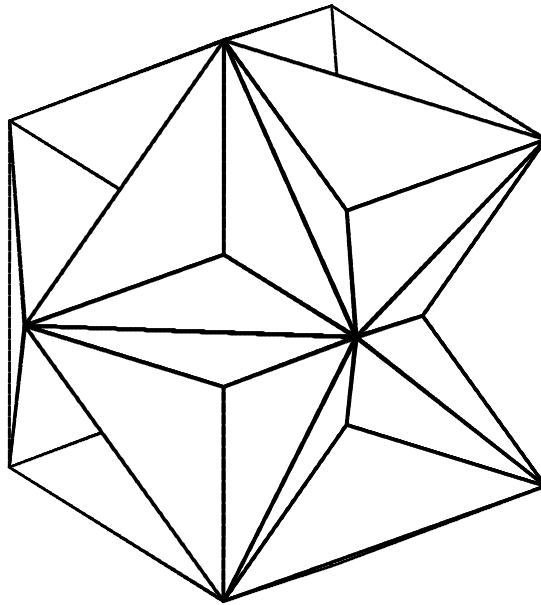
La même astuce d'échelle multiple de 5 permet de réaliser rapidement un dessin. Mais est-il correct ?

Pour le vérifier, il est possible d'utiliser certains segments d'extrémités les sommets de l'icosaèdre et qui sont concourants. Le faire fait apparaître une figure bien plus belle d'un polyèdre où 12 étoiles pentagonales sont imbriquées.



Et voici la star : le grand dodécaèdre :

L'icosaèdre constitue l'enveloppe convexe d'un polyèdre régulier non-convexe : le grand dodécaèdre. Quelques segments plus loin et le voilà !



Une déclinaison type Rubik's du grand dodécaèdre existe. Elle se nomme l'*Alexander's Star*.

Et comme on en redemande. Un second dessin du grand dodécaèdre s'obtient en permutant simplement les deux premières coordonnées des sommets de l'icosaèdre ! La même astuce pour obtenir une deuxième figure était aussi possible pour le dodécaèdre régulier, mais le polyèdre est moins attractif et la durée de l'activité était limitée, repas oblige... Il était temps de ranger ses crayons de couleur.

