

Ecole Doctorale

Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Avis de soutenance

Monsieur TIPLER CARL

présentera ses travaux en vue de l'habilitation à diriger des recherches, sur le sujet suivant :

" Métriques canoniques en géométrie kählérienne et système de Strominger "

Le jeudi 23 mai 2019 à 11h

à l'UFR Sciences et Techniques, salle des conférences (H 118), bâtiment H, 6 avenue V. Le Gorgeu, Brest.

Le jury sera ainsi composé :

- **M. AREZZO CLAUDIO, Professeur**
ICTP - I - 34151 TRIESTE - ITALIE
- **M. BOUCKSOM SEBASTIEN, Directeur de Recherche**
Ecole Polytechnique - PALAISEAU
- **M. DETHLOFF GERD, Professeur des universités**
Univ. de Bretagne Occidentale - BREST
- **M. HUISMAN JOHANNES, Professeur des universités**
Univ. de Bretagne Occidentale - BREST
- **M. MEERSSEMAN LAURENT, Professeur des universités**
Université d'Angers - ANGERS
- **M. NICOLAS JEAN-PHILIPPE, Professeur des universités**
Univ. de Bretagne Occidentale - BREST

A BREST, le 02 mai 2019

Le Président de l'Université de
Bretagne Occidentale,



M. GALLOU

Autour des métriques canoniques en géométrie hermitienne

Les travaux présentés portent sur la géométrie hermitienne, à l'interface de la géométrie algébrique complexe, de l'analyse géométrique et de la physique mathématique. La recherche de *métriques canoniques* sur des objets holomorphes (variétés, fibrés, ...) en est le fil conducteur. Un problème fondamental en géométrie complexe est celui de la classification des objets selon des familles caractérisées par certains invariants. Afin de construire des espaces de modules qui possèdent de bonnes propriétés, on est conduit à se restreindre à des familles d'objets qui possèdent des métriques spéciales, solutions d'équations issues de la physique.

On aborde deux axes de recherche :

I) Métriques canoniques en géométrie kählérienne :

En géométrie kählérienne, on cherche à construire des espaces de modules de variétés polarisées. Dans ce contexte, la conjecture de Yau, Tian et Donaldson (YTD) [16, 12, 3] suggère de se restreindre aux variétés polarisées qui admettent une *métrique extrémale* au sens de Calabi [1]. La recherche de ces métriques est un problème d'analyse globale intéressant et difficile, l'équation étant non-linéaire et d'ordre 4 sur la métrique de Kähler. Afin de tester la conjecture, il est nécessaire d'avoir des exemples variés de métriques extrémales. On présentera dans un premier temps des méthodes perturbatives de constructions de métriques extrémales qui reposent d'une part sur la *théorie du recollement* [13, 14], d'autre part sur la *théorie de la déformation* [8]. Les résultats obtenus sur les déformations complexes des variétés munies de métriques extrémales conduisent naturellement à tester localement la conjecture de YTD. Une version locale de cette conjecture est obtenue et appliquée aux *variétés toriques* [7]. Une autre approche du problème, suggérée par Donaldson, est celle de la *quantification*. La polarisation de la variété permet de plonger cette dernière dans des espaces projectifs complexes de dimension croissante, et d'obtenir une approximation en dimension finie du problème. Les métriques dites σ -*équilibrées* fournissent une approximation des métriques extrémales tout en étant les zéros d'une *application moment* en dimension finie. Ces métriques σ -équilibrées minimisent alors une fonctionnelle et sont uniques dans une classe de Kähler donnée [9, 10]. Ces résultats passent alors aux métriques extrémales, qui minimisent la fonctionnelle K -énergie et sont uniques dans leur classe de Kähler. Une interprétation GIT des résultats obtenus est également présentée [2, 15].

II) Système de Strominger et algébroides de Courant :

La résolution de la conjecture de Calabi par Yau implique qu'une variété de Kähler à fibré canonique trivial admet une famille de métriques Kähler-Ricci plates paramétrée par son cône de Kähler [17]. Afin d'étudier les espaces de modules de variétés complexes à fibré canonique trivial, on souhaite munir ses dernières de métriques canoniques et étendre le théorème de Yau aux variétés non kählériennes. Une suggestion de Yau [18] est de considérer des métriques solutions du système de Strominger (ou encore Hull-Strominger), motivé par la théorie des cordes [11]. Ce système couple une métrique *équilibrée* sur une variété complexe à fibré canonique trivial X à une métrique d'Hermite-Einstein sur un G fibré holomorphe $P \rightarrow X$. Le système d'équations qui en résulte offre un problème d'analyse globale difficile. Avant d'attaquer le problème par des méthodes d'analyse, on souhaite, comme pour la résolution de la conjecture de Calabi, fixer des structures holomorphes et métriques afin de réduire l'espace des paramètres considérés pour l'équation. On commencera alors par étudier la version linéarisée du problème et démontrer l'ellipticité des équations contraintes par une condition de jauge adéquate [4]. Dans cette étude infinitésimale, on note l'apparition d'un groupe de jauge qui décrit les symétries d'une *algébroïde de Courant* $Q \rightarrow X$, extension de l'algébroïde d'Atiyah associée à P . On explique alors que toute

solution du système de Strominger est portée sur une algébroïde de Courant particulière, à savoir une *algébroïde des cordes holomorphe*. On procède à la classification de ces algébroïdes et, en vue de la construction de l'espace des modules des solutions du système de Strominger, on développe la théorie de déformations de ces dernières à l'aide d'une algèbre de Lie différentielle graduée [5]. On démontre ensuite que pour une algébroïde des cordes holomorphe Q fixée sur X , on peut introduire une notion de classe de métriques σ , appelée *classe d'Aeppli*, similaire à la notion de classe de Kähler. L'espace B_σ des métriques de σ sur Q , paramètres des équations du système de Strominger, est bien compris et permet une approche variationnelle du système, à l'aide de la fonctionnelle *dilaton* $M : B_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ [6]. Par ailleurs, on obtient un résultat de stabilité des solutions sous déformations de Q et σ via une étude de la linéarisation des équations restreintes à B_σ .

Références

- [1] E. Calabi, *Extremal Kähler metrics*, "Seminar on Differential Geometry" (ed.S.-T. Yau), Princeton, 1982.
- [2] A. Clarke et C. Tipler, *Lower bounds on the modified K-energy and complex deformations*, Adv. Math. 252 (2014), 449–470.
- [3] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002), 289–349.
- [4] M. Garcia Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Infinitesimal moduli for the Strominger system and Killing spinors in generalized geometry*, Math. Ann. (2017) 369 : 539
- [5] M. Garcia Fernandez, R. Rubio et C. Tipler, *Holomorphic string algebroids*, preprint ArXiv 1807.10329.
- [6] M. Garcia Fernandez, R. Rubio, C. Shahbazi et C. Tipler, *Canonical metrics on holomorphic Courant algebroids*, preprint ArXiv 1803.18073.
- [7] Y. Rollin et C. Tipler, *Deformations of extremal toric manifolds*, J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 4, 1929–1958.
- [8] Y. Rollin, S. Simanca et C. Tipler, *Deformation of extremal metrics, complex manifolds and the relative Futaki invariant*, Math. Z. 273 (2013), no. 1-2, 547–568.
- [9] Y. Sano et C. Tipler, *Extremal metrics and lower bound of the modified K-energy*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 17 (2015), no. 9, 2289–2310.
- [10] Y. Sano et C. Tipler, *A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds*, preprint ArXiv 1703.09458.
- [11] A. Strominger, *Superstrings with torsion*, Nucl. Phys. B 274 (2) (1986) 253–284
- [12] G. Tian, *Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature*, Invent. Math. **137** (1997), 1–37.
- [13] C. Tipler, *Extremal Kähler metrics on blow-ups of parabolic ruled surfaces*, Bulletin de la SMF 141, fascicule 3 (2013), 481–516
- [14] C. Tipler, *A note on blow-ups of toric surfaces and cscK metrics*, Tohoku Math. J. (2) Vol. 66, No. 1 (2014), 15–29.
- [15] C. Tipler, *Relative Chow stability and optimal weights*, preprint ArXiv1710.02536.
- [16] S.-T. Yau, *Open problems in geometry*, Proc. Symposia Pure Math. **54** (1993), 1–28.
- [17] S.-T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **74** (1977) 1798–1799.
- [18] S.-T. Yau, *Complex geometry : Its brief history and its future*, Science in China Series A Mathematics **48** (2005) 47–60.