

Ecole Doctorale

*Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication*

*Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique*

**AVIS DE SOUTENANCE DE THESE**

**Le mardi 23 février 2021 à 14h**

à l'Université de Bretagne Occidentale - Amphi numérique du PN2B.

**Monsieur BERNIS JULIEN**

soutiendra une thèse de doctorat sur le sujet suivant :

" Conditions nécessaires et suffisantes en contrôle optimal et applications "

**Le jury sera ainsi composé :**

**- M. BETTIOL PIERNICOLA, Professeur des universités**

Université de Bretagne Occidentale - BREST - FRANCE

**- M. CANNARSA PIERMARCO, Professeur**

Universita di Roma Tor Vegata - ROME - ITALIE

**- M. COLOMBO GIOVANNI, Professeur**

Universita degli Studi di Padova - PADOVA - ITALIE

**- M. MARICONDA CARLO, Professeur**

Universita degli Studi di Padova - PADOVA - ITALIE

**- M. PLASKACZ SLAAWOMIR, Professeur**

Université Nicolas Copernic - TORUN - POLOGNE

**M. QUINCAMPOIX MARC, Professeur des universités**

Université de Bretagne Occidentale - BREST - FRANCE

**- MME TONON DANIELA, Professeure**

Universita degli Studi di Padova - PADOVA - ITALIE

**- M. WOLENSKI PETER, Professeur**

Louisiana States University - BATON ROUGE - LOUISIANE (USA)

A BREST, le 17 février 2021

Le Président de l'Université de  
Bretagne Occidentale,



**M. GALLOU**

**Titre :** Conditions Nécessaires et Suffisantes en Contrôle Optimal et Applications

**Mots-clés :** Contrôle optimal, équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, fonction valeur, conditions nécessaires d'optimalité, régularité des minimiseurs.

**Résumé :** La partie 1 de cette thèse traite d'un problème de Bolza non-autonome en contrôle optimal pour lequel la dynamique et le lagrangien sont continus en temps seulement presque partout.

Plusieurs caractérisations (proximale, contingente et viscosité) de la fonction valeur du problème en tant qu'unique solution généralisée de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante sont démontrées dans la classe des fonctions semi-continues inférieurement.

Le cas d'un problème avec contrainte d'état est aussi considéré. Des conditions de compatibilité *ad hoc* entre l'ensemble des contraintes et la dynamique sont introduites, ce qui permet d'approximer les trajectoires violant la contrainte d'état par des trajectoires faisables et par suite d'établir des caractérisations (proximale, contingente et viscosité) de la fonction valeur en tant qu'unique solution de

l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

La partie 2 de cette thèse traite d'un problème de Bolza non-autonome d'ordre  $N$  dans lequel le lagrangien est seulement Borel mesurable, et peut prendre pour valeur  $+\infty$ .

On établit d'abord les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme d'une équation du type Euler-Lagrange et d'une équation du type Erdmann – Du Bois-Reymond, sans imposer au lagrangien la convexité par rapport à sa dernière variable, ni aucune condition de croissance particulière.

En imposant en plus au lagrangien une condition de croissance plus générale que la croissance super-linéaire utilisée habituellement, les conditions nécessaires sont mises à profit afin d'établir que la dernière dérivée d'un minimiseur de ce problème est essentiellement bornée.

**Title:** Necessary and Sufficient Conditions in Optimal control and Applications

**Keywords:** Optimal control, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, value function, necessary conditions for optimality, regularity of minimizers.

**Abstract:** The part 1 of this thesis focuses on a non autonomous Bolza problem in optimal control for which the Lagrangian  $L$  and the dynamics  $F$  are allowed to be discontinuous with respect to time on a set of full measure (with left and right limits everywhere). Several characterizations (contingent, proximal, viscosity) of the value function of the problem as the unique solution to the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation are established in the class of lower semicontinuous functions.

The state-constrained case is also considered. Some appropriate compatibility conditions between the state of constraints and the dynamics are introduced. They allow to establish a  $W^{1,1}$  neighbouring feasible trajectories result which is then exploited to prove several characterizations (contingent, proximal, viscosity) of the value function  $V$  as the unique general-

ized solution to the Hamilton-Jacobi equation.

Part 2 of this thesis presents results concerning a non autonomous high order Bolza problem in which the Lagrangian is merely Borel measurable, and is possibly extended valued.

Necessary conditions for optimality in the Euler-Lagrange form and in the Erdmann – Du Bois-Reymond form are provided, without imposing on the Lagrangian to be convex with respect to the last variable, nor to have any kind of specific growth behavior.

By adding an extra growth assumption that is more general than the usual superlinearity with respect to the last variable, the necessary conditions are exploited to establish that the last derivative of a given minimizer is essentially bounded.