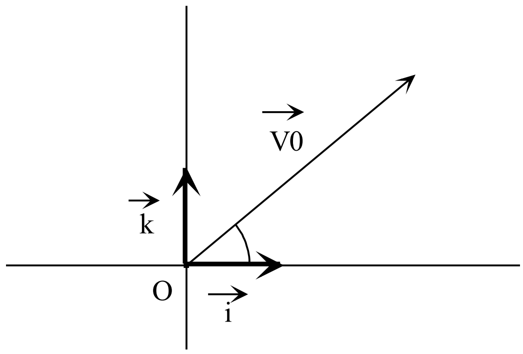
Utilisation des primitives pour résoudre un problème de physique.

<u>Problème</u> : Quel est le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale ?

<u>Expérimentation</u> : La trajectoire du projectile est filmée, les positions successives de l'objet sont enregistrées point par point(consulter le chapitre « Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur » du livre de physique).
Nous allons traiter la partie mathématique de ce problème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{k})$. Un projectile (une bille, une balle, une grenouille) est lancé du point O du sol, à l'instant t = 0, avec un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ de norme v_0(en m.s-1) , faisant un angle α avec l'horizontale . Le vecteur $\vec{v_0}$ a donc pour coordonnées $(v_0 \cos\alpha ; v_0 \sin\alpha)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$, et le vecteur accélération $\vec{a}$ du projectile , de norme constante g (constante gravitationnelle) est colinéaire et de sens contraire à $\vec{k}$; ainsi $\vec{a}$ a pour coordonnées $(a_x ; a_z)$ avec $a_x = 0$ et $a_z = -g$



<u>Partie I : Coordonnées du point M (du projectile) . Equations horaires paramétriques.</u>

1) On note $(v_x ; v_z)$ les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v_t}$ du projectile à l'instant t.
Sachant que :
- v_x est une primitive de a_x par rapport à la variable t,
- v_z est une primitive de a_z par rapport à la variable t,
- à l'instant t = 0, $\vec{v_t} = \vec{v_0}$ de coordonnées $(v_0 \cos\alpha ; v_0 \sin\alpha)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{k})$,

déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v_t}$ en fonction du temps t.

2) On note (x, z) les coordonnées du projectile à l'instant t.
Sachant que :
- x est une primitive de v_x par rapport à la variable t,
- z est une primitive de v_z par rapport à la variable t,
- le projectile est au point O(0, 0) à l'instant t = 0,

déterminer x et z coordonnées du projectile en fonction du temps t.
3) Pour quelle valeur de t, le projectile retombe-t-il sur le sol ?

<u>Partie II : Etude de la trajectoire du projectile :</u>

<u>1) Utilisation du logiciel géogébra pour visualiser cette trajectoire</u>.
- *Saisir le réel V0= 30(en m.s^{-1}) (par exemple)*
- *Saisir g = 10 (ou 9.8)*
- *Créer un curseur angle α , de 0 à 90°*
- *Créer un curseur t (temps) de 0 à 6, incrément 0.1.Expliquer cette valeur.*
- *Saisir le vecteur accélération a (en minuscule) = (0, -g)*
- *Saisir le vecteur v0 =* $(V_0 \cos(\alpha), V_0 \sin(\alpha))$.
- *Saisir le point M= (x, y), où x et y sont les formules déterminées dans la question 2).*
- *Saisir le vecteur vt =* (vx, vz) *déterminé dans la question 1).*
- *Saisir le vecteur a = (0, - g)*
- *Utiliser la commande vecteur défini par un point et un vecteur pour placer les vecteurs vt et a d'origine M. Ne pas afficher ces deux derniers vecteurs avec pour origine O.*

- *Faire varier le curseur t(on activera la trace du point M).*
  Quelle semble être l'allure de la trajectoire du point M ?

- *Faire varier le curseur de l'angle , pour un α donné, on obtient une trajectoire du point M.*
- *Cas particulier , $\alpha = 90°$. Quelles semblent être les allures de ces trajectoires ?*

2) <u>Equation de la trajectoire :</u>

1) Lorsque $\alpha \neq 90°$, démontrer que : $z = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$. Quelle est la nature de la trajectoire du projectile ?
2) a) Démontrer que la portée horizontale du projectile (distance entre l'origine O et le point où le projectile retombe sur le sol) est égale à $\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$.

   b) Pour quelle valeur de l'angle de tir la portée horizontale est-elle maximale ?

   c) Que se passe-t-il lorsque l'angle de tir est égal à $\pi/2$?

<u>Retour sur écran</u>

- *Saisir Fonction [$-\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$, 0, $\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$]. Ainsi apparaît la trajectoire sur [0, $\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$]. Colorier sa représentation en rouge (par exemple).*
- *Faire varier l'angle α. (on pourra ne plus afficher le point M)*
- *Activer la trace de la fonction ci-dessus.*

On remarque qu'une partie du plan est coloriée, délimitée par une courbe qu'on appelle courbe de sécurité. Tous les points de cette zone peuvent être atteints par le projectile. Quant aux autres points, ils sont hors d'atteinte

<u>Partie III : La parabole de sécurité :</u>

L'objet de cette partie est de déterminer tous les points du repère qui peuvent être atteints par le projectile.

1) <u>Retour sur écran : visualisation du problème.</u>

- *Créer un curseur xa de 0 à 90. (portée maximale pour V0 = 30 et g =10)*
- *Saisir le point N1 = (xa, 0)*
- *Construire la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et passant par N1.*
- *Construire le point d'intersection de cette droite et d'une trajectoire. Soit N ce point.*
- *Faire varier l'angle α. Activer la trace de N.(on peut la colorier en bleu). Que visualise cette trace ?*
- *Effectuer la même démarche avec d'autres valeurs de xa. (Rafraîchir l'affichage entre chaque valeur de xa)*

2) <u>Equation de la parabole de sécurité</u> :

a) Exprimer l'altitude z d'un point d'abscisse x de la trajectoire en fonction de α.. On pose $z = f_x(\alpha)$. (Remplacer $1/(\cos(\alpha))^2$ par $1+\tan^2(\alpha)$).

a) Pour une valeur de x donnée, démontrer que, lorsque α varie, z admet un maximum. Calculer en fonction de x la valeur de ce maximum.(on démontrera que z admet un maximum pour une certaine valeur de $\tan(\alpha)$ et on exprimera cette valeur de $\tan(\alpha)$ en fonction de x.)

b) En déduire l'équation de <u>la parabole de sécurité</u> qui délimite l'ensemble des points qui peuvent être atteints par le projectile.

c) <u>*Retour sur écran*</u> *: Tracer cette parabole de sécurité.*

Commentaires :

- *Dans nos classes de terminale C, puis de S, nous avons traité régulièrement ce problème en devoir maison, celui-ci s'inspire d'un texte extrait de la brochure « les trésors de tonton LULU » éditée en 1994.*

- *A cette époque, nous ne disposions pas de logiciel aussi convivial que géogébra. Nous tracions des courbes avec des logiciels tels que « Archimède ».*

- *Cette activité a été traitée en classe. Les élèves n'ont pas utilisé les ordinateurs.(Par manque de temps, nous ne pouvons pas faire travailler systématiquement les élèves sur les ordinateurs ! hélas) Les professeurs ont illustré ce problème avec l'ordinateur pour les parties I et II.*

- *Les parties expérimentales de tout le problème et la partie théorique III ont fait l'objet d'un devoir maison facultatif. Six élèves motivés d'une classe de 35 ont rendu ce travail. Les productions furent satisfaisantes.*

- *Les élèves ont toujours apprécié ce type de travail qui permet de faire le lien entre les programmes de physique et de mathématiques. Il semble que les illustrations à l'aide de logiciels aident à la compréhension du phénomène physique et du travail mathématique.*