TP2 : Nombres complexes et triangles particuliers.

On considère un point M_1 d'affixe z, avec z nombre complexe n'appartenant pas à R.
On note M_2 le point d'affixe z^2 et M_3 le point d'affixe z^3
On admettra que sous ces conditions les points M_1, M_2 ,M_3 sont distincts deux à deux et ne sont pas alignés.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des points M_1 tels que le triangle $M_1M_2M_3$ soit un triangle particulier.

Partie expérimentale :

z = [r ; α] affixe d'un point M.

1) Créer un curseur nombre r variant de 0 à 10, et un curseur angle α variant de 0 à 2π ou de 0° à 360°.
2) Justifier que les coordonnées du point M_1 d'affixe z sont (r cosα , r sinα). Dans la barre de saisie, taper M_1 = (r cosα , r sinα).(Attention « , »et non pas « ; »).
3) Quelles sont les formes trigonométriques de z^2 et de z^3. Saisir les points M_2 et M_3.
4) Créer le triangle $M_1M_2M_3$.
5) Faire varier les curseurs r et α. Observer le triangle $M_1M_2M_3$.

Partie théorique :

1) Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_1 si et seulement si $|z+1| = 1$. En déduire l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle isocèle en M_1 . Créer cet ensemble, placer approximativement le point M_1 sur cet ensemble, vérifier le résultat démontré.(Il est difficile de placer M_1 de façon précise, car r et α varient)

2)Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_2 si et seulement si $|z| =1$. En déduire l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle isocèle en M_2 . Créer cet ensemble, placer précisément le point M_1 sur cet ensemble, vérifier le résultat démontré.

3) En déduire les valeurs de z pour lesquelles le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

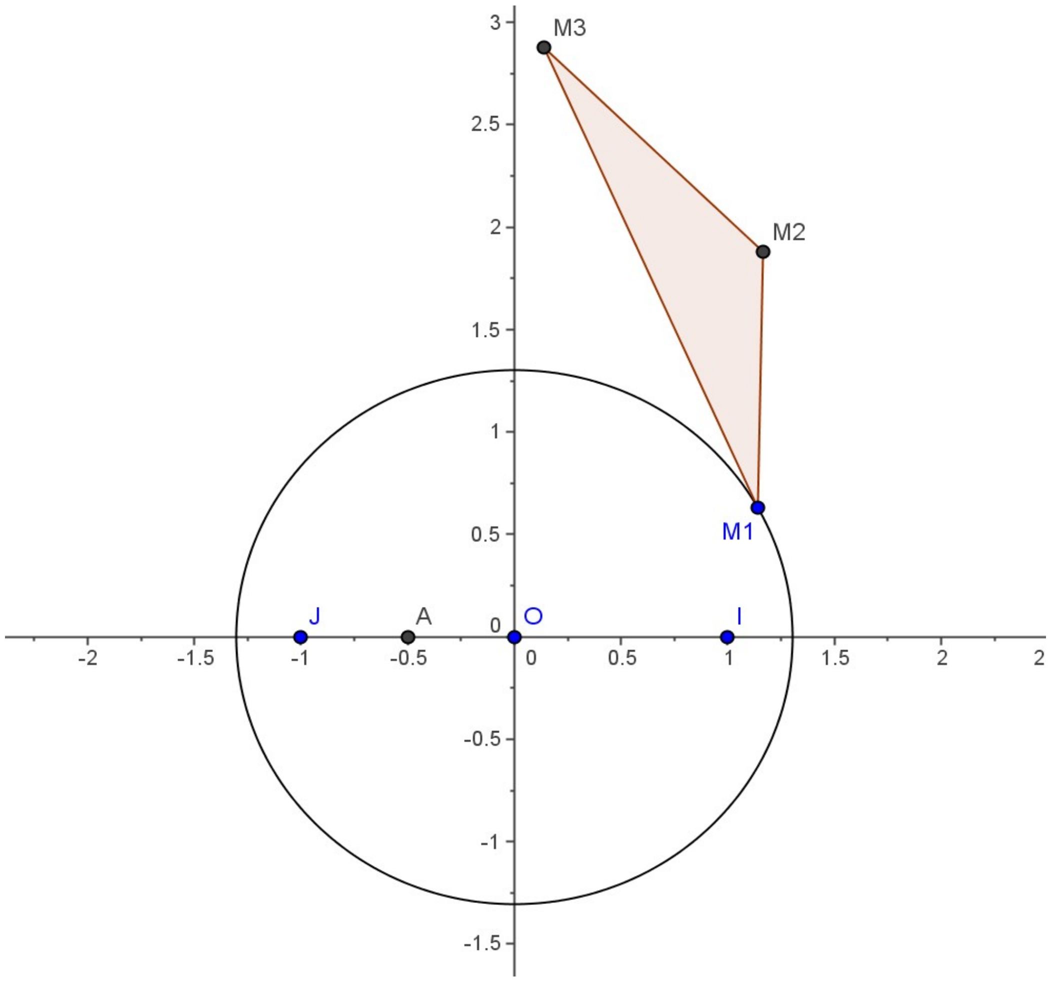
4)

- Démontrer que $\left(\overrightarrow{M_1M_2};\overrightarrow{M_1M_3}\right)$ = arg (z+1).
- En déduire l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle rectangle en M_1.
- Créer cet ensemble, placer approximativement le point M_1 sur cet ensemble, vérifier le résultat démontré.(Il est difficile de placer M_1 de façon précise, car r et α varient)

5) Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_3 si et seulement si $\arg\left(\frac{z}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in Z$. En déduire l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle rectangle en M_3.

6) Déterminer l'ensemble des points M_1 tels que $M_1M_2M_3$ soit un triangle isocèle en M_3

Trouver une autre façon de créer M_2, M_3 à partir d'un point M_1.



Commentaires :

- *Ce Travail dirigé s'inspire d'un exercice des annales du bac.*
- *Cet exercice se prête à un travail expérimental, mais faute de temps, la partie expérimentale a été présentée en classe par le professeur. Deux séances de module ont été nécessaires pour traiter cet exercice, quatre élèves ont eu le temps au cours de ces deux séances de traiter la partie expérimentale.*
- *On peut modifier la partie expérimentale de la façon suivante :*
  - ✓ *Créer un point libre M1*
  - ✓ *Créer l'angle α égal à IOM1*
  - ✓ *Créer le réel r égal à la longueur du segment OM1.*
  - ✓ *Construire le point B intersection de l'axe des abscisses(demi- droite correspondant aux abscisses positives) et du cercle de centre O passant par M1.*
  - ✓ *Créer le point D image de B par l'homothétie de centre O et de rapport r^2, et ensuite M2 image de D par la rotation de centre O et d'angle 2α.*
  - ✓ *Créer le point E image de B par l'homothétie de centre O et de rapport r^3 et ensuite M3 image de E par la rotation de centre O et d'angle 3α.*
  - ✓ *Justifier ces constructions.*
  - ✓ *Redéfinir M1 comme point des différents ensembles déterminés dans la partie théorique et valider les démonstrations.*