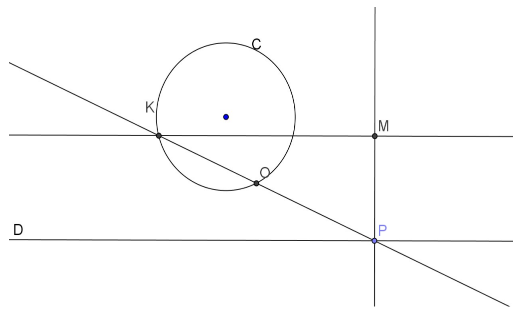
Octobre 2008 **DM1 : Etude de courbes.**

Le but de ce problème est d'étudier dans des cas particuliers des lieux géométriques définis de la façon suivante.
On se donne un cercle $\mathcal{C}$ et une droite $\mathcal{D}$.
Soit O un point du cercle $\mathcal{C}$ et P un point de la droite $\mathcal{D}$.
Soit K l'intersection ($K \neq O$) de la droite (OP) et du cercle $\mathcal{C}$.
Le point M est l'intersection de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant K.
On se propose d'étudier le lieu des points M lorsque P décrit $\mathcal{D}$



On munit le plan d'un repère (O, i, j).

Première partie :Le centre du cercle est sur l'axe des ordonnées.

A) <u>Etude expérimentale.</u>

Construction du lieu géométrique à l'aide du logiciel géogébra.

- Créer les points O(0,0) et A(0,2) et le cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par O.
- Créer un réel d = 4 (*taper d= 4 dans la barre de saisie*) et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=d$
- Créer un point P sur $\mathcal{D}$.
- Créer le point K intersection de la droite (OP) et du cercle $\mathcal{C}$.*(attention, l'intersection du cercle et de la droite (OP) comprend deux points O et un autre point, or seule l'intersection différente de O nous intéresse. Pour obtenir seulement ce point, utiliser point intersection de deux objets et cliquer exactement à l'intersection, ou taper dans la barre de saisie intersection [c, f, 2] ou intersection[c,f,1] c et f étant les étiquettes respectives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$)*
- Créer le point M défini ci-dessus. Activer la trace de M
- Observer la trace du point M lorsque le point P décrit la droite $\mathcal{D}$
- Rafraîchir l'écran et créer le lieu du point M lorsque P décrit $\mathcal{D}$: *saisir lieu[M,P].*
- Imprimer votre figure.

(*enregistrer votre travail, vous pourrez le réutiliser dans les parties 1 C et 2*)

Conjectures.

- Le point M décrit la courbe représentative d'une fonction f. Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur cette fonction : son domaine de définition, son signe, sa parité, ses branches infinies, ses variations, son extremum ?
- Pouvez-vous expliquer géométriquement certaines de ces conjectures. (son domaine de définition, son signe, sa parité, ses branches infinies, son extremum)(on se contentera d'explications succinctes)

B) Etude théorique .

1. Lorsque le point P appartient à l'axe des ordonnées, quelle est la position du point M ?
2. D est la droite d'équation $y=4$ et P est un point de D d'abscisse $m\neq 0$.
   a. Donner l'équation réduite de la droite (OP)
   b. Donner l'équation du cercle de centre A(0,2) passant par O.
   c. Calculer les coordonnées du point K et en déduire que les coordonnées du point M sont $\left(m,\dfrac{64}{m^2+16}\right)$
   d. En déduire que le point M appartient à la courbe L d'équation $y=f(x)=\dfrac{64}{x^2+16}$.
   e. Démontrer les conjectures émises dans la partie A
   f. Lorsque le point P décrit la droite D le point M décrit-il toute la courbe L ?

Cette courbe fut étudiée par Maria Agnesi(italienne 1718-1799) qui fut la première femme à éditer des travaux mathématiques, et aussi la première à obtenir une chaire dans une université (1750). Cette courbe est appelée « sorcière d'Agnesi »,du fait d'une mauvaise traduction, en effet le texte italien semble parler de versiera(qui veut dire diablesse mais aussi roulante)

C) Retour sur écran

- Afficher l'objet d, vous obtenez un curseur, faire varier d. Quel semble être l'influence du curseur d sur ces courbes ?
- Quelle conjecture peut-on émettre sur deux courbes de paramètres d et $-d$?

Deuxième partie : le centre du cercle se trouve sur l'axe des abscisses.

A)Etude expérimentale.*(inutile d'ouvrir une nouvelle fenêtre, vous pouvez utiliser le travail réalisé dans la partie 1)*

- Reprendre votre travail sur l'ordinateur. Redéfinir le point A (2,0)
- Redéfinir d = 0 .5
- Le point M décrit la courbe représentative d'une fonction g. Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur cette fonction : son signe, sa parité, ses branches infinies, ses variations, ses extrema ?
- Pouvez-vous expliquer géométriquement certaines de ces conjectures.

B)Etude théorique.

a. En adoptant la même démarche que dans la partie 1, démontrer que le point M a pour coordonnées $\left(m,\dfrac{8\text{m}}{4\text{m}^2+1}\right)$ et décrit la courbe d'équation $y=g(x)=\dfrac{8\text{x}}{4\text{x}^2+1}$
b. Déterminer la valeur de m pour laquelle la droite (OP) est tangente à la courbe en O .
c. Démontrer les conjectures émises dans la partie expérimentale.

Cette courbe s'appelle « serpentine ou Anguinea ». Elle fut étudiée par le marquis de l'Hospital et par Huyens. Son nom latin « Anguinea » est dû quelques années plus tard à Newton (1701)
Pour plus de renseignements, vous pouvez consulter le site « Chronomath »

C)Retour sur écran.

- Comme dans la première partie, afficher l'objet d, et faire varier ce curseur d. Quelle est l'influence de d sur ce lieu géométrique ?
- Quelle conjecture peut-on émettre sur deux courbes de paramètres d et $-d$?

Troisième partie (facultative)
Démontrer les conjectures émises dans les parties 1 et 2, lorsque le paramètre d varie. Faire une étude générale.

<u>Commentaires :</u>

- *Ce devoir maison a été donné au mois d'octobre. Celui-ci s'inspire d'un TP proposé dans le livre Pixell et d'une brochure de l'IREM de Strasbourg « activités géométriques »*

- *Seules des connaissances sur les fonctions, niveau première, sont nécessaires.*

- *La partie expérimentale n'a pas posé de problème. Lors de deux séances de TP en classe, les élèves avaient utilisé le logiciel géogébra.*

- *Ce devoir a été réussi correctement. Les élèves ont essentiellement rencontré des difficultés à expliquer géométriquement les conjectures, ils n'ont pas compris ce que nous attendions.*

- *Les questions facultatives n'ont été traitées que par cinq élèves.*