DM2 : Etude de suites.

Exercice 1

On définit la suite u pour tout entier n , $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$

1. Détailler le calcul des trois premiers termes de la suite.
2. A l'aide d'un tableur, afficher les 30 premiers termes de cette suite .

Méthode 1 : Vous pourrez pour cela effectuer les calculs suivants :

	A	B	C
1	n	n(n-1)	u(n)
2	1		=somme(B2 :B2)/A2
3			

Commentaires sur le contenu de la cellule C2
Si vous recopiez la formule vers le bas :
Dans C3 vous obtiendrez la formule : = somme(B2 :B3)/A3
Dans C4 vous obtiendrez la formule : = somme(B2 :B4)/A4 etc……
Remarque : si vous ne mettez pas le symbole $ vous obtiendrez dans C3 : = somme (B3 :B3)/A3

Méthode 2 : On peut noter $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$

La suite S est une suite récurrente définie par son premier terme S_1 et par la relation de récurrence $S_{n+1} = S_n + n(n+1)$

	A	B	C
1	n	S(n)	u(n)
2	1		

Remarque : vous pourrez pratiquer les deux méthodes et retenir celle qui vous convient le mieux.

3. Imprimer les valeurs obtenues pour les 30 premiers termes de la suite u ? Préciser les formules introduites dans les cellules B et C pour la méthode 2.
4. Compte tenue des valeurs obtenues pour la suite u, on se propose de multiplier ces valeurs par 3 et de noter pour tout entier n ≥ 1, $v_n = 3u_n$
   a. A l'aide du tableur, afficher les 30 premiers termes de la suite v et une représentation graphique de cette suite.
   b. Proposer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que l'expression de u_n trouvée dans la question précédente est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.
Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

- La population totale des trois zones reste constante.
- Chaque année, la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.
On désigne par a_n , b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2008 + n . On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n , b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

Etude expérimentale.

On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

a. A l'aide d'un tableur, imprimer la valeur des 50 premiers termes des suites a, b et c.
Préciser les formules introduites dans chaque cellule.

b. Représenter graphiquement, à l'aide du tableur , les suites a , b et c.

c. Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites a, b et c.

Etude théorique.

1.Ecrire les relations de récurrence vérifiées par les suites a, b, c.
2.Pour chaque année 2008 + n, soit d_n la différence de population entre les zones A et B .
Quelle est la nature de la suite d ? Démontrer ce résultat.
3.On se propose de calculer les limites des suites a, b et c.

a. Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.
b. En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
c. Déterminer les limites des suites a, b et c.