DM 3:Etude des solutions d'une équation différentielle.

Préliminaire :

On se propose dans cette partie de résoudre l'équation différentielle (E) $y' - 2y = xe^x$

1. Vérifier que la fonction u définie sur IR par $u(x) = -(x+1)\,e^x$ est solution de (E) .
2. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - u$ est solution de l'équation différentielle (E') $y' - 2y = 0$.
3. Résoudre l'équation différentielle (E') .
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

Les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = xe^x$ sont les fonctions f_k définies sur R par :

$$f_k(x) = k\,e^{2x} - (x+1)e^x.$$

On note C_k la courbe représentative de f_k.

Nous allons comparer les variations des fonctions f_k selon la valeur du paramètre k, et ensuite déterminer l'ensemble des points des courbes C_k possédant une tangente horizontale.

<u>Conjectures émises à l'aide d'un logiciel. :</u>

On peut représenter les courbes à l'aide du logiciel Geogebra
Avec le logiciel Geogebra, on peut représenter les fonctions f_k en créant un curseur. Ce curseur permet de faire varier la valeur du paramètre k. On peut alors définir dans la barre de saisie la fonction f_k .
Ce logiciel calcule les fonctions dérivées d'une fonction déjà définie.
(Voir Aide)Taper f' ou dérivée[f] (dans commande : vous trouverez dérivée[])
Ce logiciel permet la construction de point sur un objet, de point intersection de deux objets (intersection de deux droites, d'une droite et d'une courbe etc..) Utiliser le menu.
Pour redéfinir un objet ou modifier les propriétés d'un objet , on clique à droite sur la souris après avoir sélectionné l'objet. (Cette commande est valable sur la plupart des logiciels)

- *Représenter quelques courbes C_k en faisant varier les valeurs de k. Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur les variations des fonctions f_k. ?*
- *Comment pouvez-vous construire le(s) point(s) d'une courbe C_k possédant une tangente horizontale ? Expliquer.*
- *Faire apparaître la trace de ces points(activer trace et faire varier le curseur k). Ces points semblent décrire une courbe. On cherchera à déterminer l'équation de cette courbe dans l'étude ci-dessous.*
- *Imprimer les courbes. Imprimer la trace des points des courbes C_k qui admettent une tangente* horizontale.

<u>Etude de la famille de fonctions.</u> $f_k(x) = k\,e^{2x} - (x+1)e^x$

1) Vérifier que :

$f'_k(x) = e^x\left(2ke^x - (x+2)\right)$ *on pose alors* $g_k(x) = 2ke^x - (x+2)$. $f'_k(x)$ *et* $g_k(x)$ *sont de même signe.*

2) **Pour k $\leq$ 0**,

- Dresser le tableau de variation de g_k (limites aux bornes et variations). En déduire le nombre de solution de l'équation $g_k(x) = 0$.
- En déduire les variations de f_k. Combien la courbe C_k possède-t-elle de tangente horizontale ?

3) **Pour k > 0**.

- Dresser le tableau de variation de g_k (limites aux bornes et variations).
- Vérifier que le minimum de g_k est égal à ln(2k) –1.
- Déterminer , suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $g_k(x) = 0$.
- En déduire, suivant les valeurs de k, les variations de f_k. Combien la courbe C_k possède-t-elle de tangente horizontale ?

Ces résultats sont-ils cohérents avec les conjectures émises ?

4) **Ensemble des points des courbes C_k possédant une tangente horizontale.**

- Les fonctions f_k sont solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = xe^x$. A quelle courbe Γ appartiennent ces points ?Donner son équation. Vérifier avec le logiciel GeoGebra.