Devoir maison 5. (année 2007-2008)
Travaux pratiques : L'inversion.

L'objectif de ce travail est d'étudier la fonction de C-{0} dans C-{0}définie par f(z)= $\frac{1}{\overline{z}}$.

On nomme A et A' les images respectives de z et z'= f(z)dans le plan complexe, et F la transformation du plan P privé du point O qui au point A associe le point A '.
Le but de cette étude est de déterminer l'ensemble des points décrits par A' lorsque le point A décrit une courbe donnée : cela s'appelle un « *lieu géométrique* »

A) Questions préparatoires

Soit z un nombre complexe z = x + y i, z' = f(z)

1) Exprimer Re(z') et Im(z') en fonction de x et de y.
2) La forme trigonométrique de z = [r ; α], déterminer celle de z' en fonction de r et α.

B) **Etude expérimentale à l'aide du logiciel Geogebra.**(compte rendu, commentaires sur papier, imprimer les figures))

Quelques généralités sur Geogebra :

- *Lancer geogebra, dans le menu « Affichage » faire apparaître la barre ou champ de saisie, les axes, fermer la fenêtre d'algèbre . Mettre le repère au milieu de l'écran et agrandir(dernier menu déroulant).*
- *Si vous voulez modifier les propriétés d'un objet (nombre, point, droite, cercle courbe etc..), cliquez sur cet objet, lorsque celui-ci apparaît en surbrillance, cliquez droit, vous pouvez alors le cacher, faire apparaître son étiquette, activer sa trace, le redéfinir, le renommer,l'effacer, changer son aspect etc…*
- *Ne pas hésiter à utiliser l'aide.*

1) **Construction de l'image d'un point** .
   a) Créer un point libre noté A.
   b) Quelles sont les coordonnées de A' ? Créer le point A'. (*dans la barre de saisie, on écrit A' = (abscisse de A' en fonction des coordonnées de A, ordonnée etc……..), x(A) , y(A) est la syntaxe des coordonnées de A)).*
   c) Que remarquez-vous sur les positions relatives des points O, A et A',des points A et A' par rapport au cercle trigonométrique ?

2) **Points invariants.**
   a) Chercher expérimentalement à faire coïncider A et A'.
   b) Quelle conjecture pouvez vous faire sur l'ensemble des points invariants de F ?

3) **Image d'une droite donnée.**
   - Créer deux curseurs notés a et b. Dans un premier temps, fixer a = 1 et b =1(*on peut dans la barre de saisie, écrire a = 1 pour fixer la valeur de a à 1)* .
   - Créer la droite d'équation y = a *x +b. (*Si l'étiquette(nom) de cette droite n'apparaît pas, cliquer sur la droite, lorsque celle-ci apparaît en surbrillance, cliquer droit sur la souris, l' étiquette et les propriétés de la droite apparaissent)*
   - Redéfinir le point A comme point de cette droite. *(A= point [c], si « c » est l'étiquette de cette droite).*
   - Faire bouger A sur cette droite, et observer comment varie la position du point A', activer la trace du point A'. Que remarquez-vous ?
   - Créer le lieu de A' lorsque A décrit cette droite, et colorier le.*(Pour créer ce lieu, vous pouvez utiliser un des menus déroulants) cliquer sur lieu, sur le point A' et en dernier sur le point A, ou dans la barre de saisie taper lieu[A',A])*
   - Quelle conjecture pouvez -vous faire sur l'image par F de la droite d'équation y = x +1 ? Quelle point particulier semble appartenir à cette image ? Appartient-il réellement à cette image ?

4) **Image d'une droite quelconque.**
   a) Faire varier la valeur de a. Comment varie le lieu du point A' ?
   b) Fixer a (par exemple a=1), faire varier la valeur de b. Comment varie le lieu du point A' ?
   c) Quelles conjectures pouvez-vous formuler pour l'image par F de la droite d'équation y = ax +b. ?
   d) Créer un troisième curseur d, tracer la droite d'équation x = d, redéfinir le point A comme point de cette droite. Comment varie le lieu du point A' ? Placer A sur l'axe des abscisses, où se trouve A' ?Peut-on affiner la conjecture ?
   e) Faire une synthèse de vos conjectures.

Cacher(contraire d'afficher) les curseurs de a, b, d, la droite d'équation y = ax +b.

5) Image d'un cercle de centre donné.

- Créer un curseur r prenant les valeurs de 0 à 8.
- Créer un point libre, nommer le B
- Créer un cercle de centre B et de rayon r.
- Redéfinir le point A comme point de ce cercle.

a) Redéfinir B point de coordonnées (0,0).
Faire varier la valeur de r, comment varie le lieu de A'. Quelles conjectures pouvez-vous formuler pour l'image de ce cercle par F ?

b) Redéfinir B point de coordonnées (4, 3).

- Faire varier la valeur de r, comment varie le lieu de A'.
- Pour affiner les conjectures , tracer la droite (OB), le cercle trigonométrique.

Quelles conjectures pouvez-vous formuler pour l'image de ce cercle par F ?
c) Même travail avec B(0.4,0.3)

6) Image de d'autres courbes.(par curiosité)

- Faire tracer l'image d'une parabole par F.
- Faire tracer l'image d'une hyperbole par F.

C) Etude théorique.

1) Généralités.

a) Justifier les positions relatives de O, A, A', de A et A' par rapport au cercle trigo.
b) Déterminer l'ensemble des points invariants.
c) Pour tout point M différent de O, déterminer FoF(M)
d) L'affixe de A' est z'=x'+y'i et celle de A est z = x +y i, $z' = \frac{1}{\bar z}$, exprimer z en fonction de z' et en déduire x et y en fonction de x' et y'.

2) Image d'une droite d'équation y = ax +b.

On suppose que dans cette question A est un point de la droite d'équation y = ax +b.

a) Quelle équation vérifient x' et y' ?
b) En discutant suivant les valeurs de b, démontrer les conjectures émises dans la partie B sur l'image d'une droite par F.

3) Image d'une droite d'équation x = d.

a) Quelle équation vérifient x' et y' ?
b) En discutant suivant les valeurs de d, démontrer les conjectures émises dans la partie B sur l'image d'une droite d'équation x = d par F.

4) Image d'un cercle de centre donné.

On considère un cercle de centre B et de rayon r.

a) B = O origine du repère. Démontrer les conjectures émises dans la partie B.
b) B(4, 3). On note ω l'affixe du point B.A est un point du cercle de centre B et de rayon r, on note z son affixe, A' = F(A) et on note z' son affixe. A est un point différent du point O.

- Démontrer que A appartient au cercle de centre B et de rayon r si et seulement si $z\bar z - \bar\omega z - \omega\bar z + \omega\bar\omega = r^2$.
- En déduire que $(r^2 - 25)z'\bar{z}' + \bar\omega z' + \omega\bar{z}' = 1$.
- Quelle équation vérifient x'=Re(z') et y'=Im(z') ?

c) En discutant suivant les valeurs de r, démontrer les conjectures émises dans la partie B sur l'image d'un cercle de centre B et de rayon r.(on peut aisément généraliser cette démonstration)

5) **Construction géométrique de l'image d'un point**.(facultatif)

a) Construction à l'aide géogebra, créer un point libre, nommer le M, placer le à l'extérieur du cercle trigonométrique. Comme dans la partie B) créer son image M' par F.
b) Construire le cercle de diamètre [OM]. Construire les intersections de ce cercle et du cercle trigonométrique. Construire la droite passant par ces deux points d'intersection. On nomme M_1 l'intersection de cette droite et de la demi droite [OM). Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?
c) Démontrer par des considérations géométriques que $OM \times OM_1 = 1$. Justifier votre conjecture.
d) Décrire un programme de construction de l'image par F d'un point M à l'intérieur du cercle trigonométrique.

Commentaires :

- *Ce type d'activité se prête bien à la démarche expérimentale.*

- *Ce devoir maison a été réalisé par des groupes de deux à trois élèves. Les élèves avaient peu utilisé le logiciel, nous avons donc détaillé les procédures de celui-ci. Avec la version de juin 2009, les nouvelles fonctions du logiciel permettent de simplifier son utilisation.*

- *La partie expérimentale n'a pas posé problème, par contre les élèves ont rencontré quelques difficultés à émettre des conjectures. Certains ont émis des conjectures fausses, par exemple A et son image A' sont symétriques par rapport au cercle trigonométrique. D'autres n'ont pas remarqué les différents cas, par exemple que l'image d'une droite n'est pas toujours un cercle, que le point O n'a pas d'antécédent. Beaucoup d'élèves n'ont pas réellement fait une synthèse de leurs conjecture, n'ont pas cerné que l'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle passant par O, mais privé de cette origine et que l'image d'une droite passant par O est globalement invariante. Faut-il être plus directif ?*

- *La partie théorique a été bien réussie, on retrouve quelques difficultés à discuter suivant les différents paramètres.*