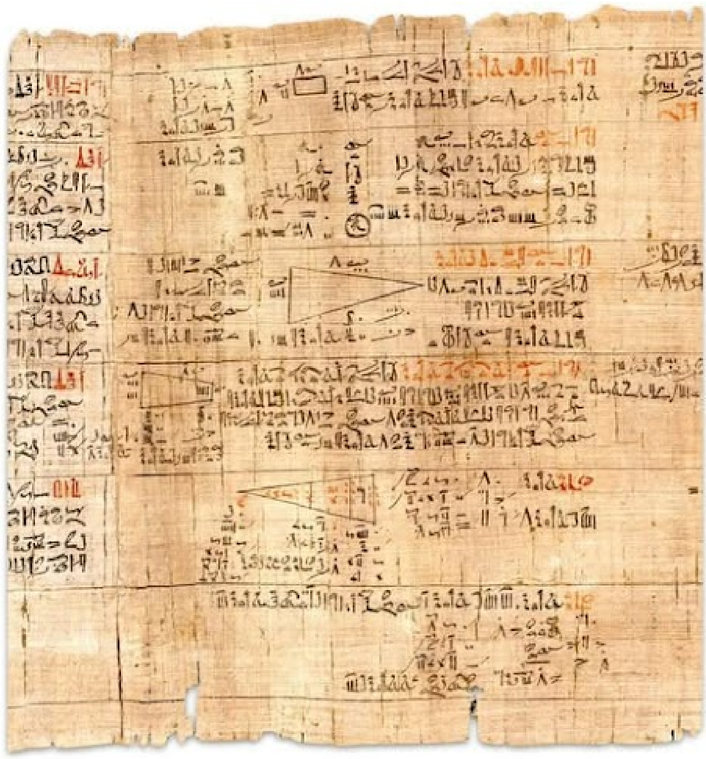
Retour sur les fractions égyptiennes



Fragment du Papyrus Rhind (On notera, en rouge, les titres des *rubriques*)

N.B. Le Papyrus Rhind est rédigé en hiératique (toujours écrit de droite à gauche), la forme cursive de l'écriture hiéroglyphique.

La multiplication égyptienne

Soit à calculer 95×87. On décompose 87 en puissances de 2 : $87 = 1 + 2 + 2^2 + 2^4 + 2^6$. On dresse le tableau des $2^k \times 95$ jusqu'à $k = 6$:

1	95	✓
2	190	✓
4	380	✓
8	760	
16	1520	✓
32	3040	
64	6080	✓

En cochant les cases correspondant aux puissances de 2 intervenant dans 87, on obtient le résultat par addition : $95 \times 87 = 95 + 190 + 380 + 1520 + 6080 = 8265$.

Notation des nombres et des fractions en hiéroglyphes dextroverses

1 = 𓏤, 10 = 𓎆, 100 = 𓍢, 1 000 = 𓆼,

10 000 = 𓂭, 100 000 = 𓆐, 1 000 000 = 𓁨 ...

2026 = 𓆼𓆼𓎆𓎆𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤

Les fractions unitaires sont notées en faisant précéder ou en surmontant le dénominateur du hiéroglyphe 𓂋. Ainsi la décomposition du Papyrus Rhind

$$\frac{26}{27} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54}$$

se transcrit-elle en hiéroglyphes

le premier hiéroglyphe représentant $\frac{2}{3}$. Le tableau suivant traduit la méthode qu'a employée le scribe pour obtenir cette décomposition où sont cochées les fractions retenues :

1	27		26
2/3	18	✓	8
1/4	6 3/4		8
1/6	4 1/2	✓	3 1/2
1/9	3		3 1/2
1/12	2 1/4	✓	1 1/4
1/18	1 1/2		1 1/4
1/36	3/4	✓	1/2
1/54	1/2	✓	0

On ne sait pas pourquoi il a retenu cette décomposition plutôt que $\frac{26}{27} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{54}$ pourtant plus courte.

Décomposition égyptienne : les questions

Si x est un rationnel de $]0,1[$, nous appellerons *décomposition égyptienne* de x toute suite finie strictement croissante $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ d'entiers naturels telle que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Par abus de langage, nous dirons souvent que la somme précédente est une décomposition égyptienne de x, l'entier n étant alors la *longueur* de cette décomposition.

1. Peut-on énoncer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers a et b premiers entre eux, pour que $\dfrac{a}{b}$ admette une décomposition égyptienne de longueur 2 ?

2. Tout rationnel $x \in]0,1[$ admet-il une décomposition égyptienne ? La réponse est positive et nous donnerons deux algorithmes permettant d'en obtenir.

3. Un dernier aspect est le problème de la longueur minimale d'une décomposition. Nous verrons que cette question débouche sur des problèmes encore ouverts.

Les décompositions de longueur 2

Lemme

Soit (a, b, c) un triplet d'entiers strictement positifs tel que $4a^2 + b^2 = c^2$. Alors, si d est le p.g.c.d. de ces trois entiers, il existe un couple (u, v) d'entiers premiers entre eux et de parités distinctes tel que $u < v$ et

1. *Si $2d \nmid b$, $a = duv$, $b = d(v^2 - u^2)$ et $c = d(u^2 + v^2)$.*
2. *Si $2d \mid b$, $a = d(v^2 - u^2)$, $b = 4duv$ et $c = 2d(u^2 + v^2)$.*

Proposition 1

Soit (a, b) un couple d'entiers strictement positifs premiers entre eux tel que $a < b$. Pour qu'il existe un couple (x, y) d'entiers positifs tel que $x < y$ et

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

il faut et il suffit qu'il existe un triplet (p, u, v) d'entiers strictement positifs tel que

1. *$u < v$, $u \wedge v = 1$ et $b = puv$.*
2. *$a \mid u + v$.*

Et alors $x = \dfrac{pu(u+v)}{a}$ et $y = \dfrac{pv(u+v)}{a}$.

Exemple : $\dfrac{7}{169} = \dfrac{1}{26} + \dfrac{1}{338}$.

Exercice : trouver les huit décompositions de longueur 2 de $\dfrac{7}{480}$ et les cinq de $\dfrac{11}{480}$.

Les algorithmes de Fibonacci et d'Engel

Dans la suite, $\lceil x \rceil$ désigne la premier entier $\geqslant x$.

Proposition 2 (Algorithme de Fibonacci)

Soit (p, q) un couple d'entiers naturels strictement positifs que $p < q$. Il existe une suite d'entiers strictement croissante $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ avec $n \leqslant p$ telle que

1. $\dfrac{p}{q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}$.

2. $a_1 = \left\lceil \dfrac{q}{p} \right\rceil$ *et, pour* $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $a_{j+1} > a_j(a_j - 1)$.

Remarque

Par récurrence sur j, il n'est pas très difficile de prouver que, si l'on pose $a = a_1$, pour tout j

$$a_j \geqslant a(a-1)^{2^{j-1}-1},$$

qui explique que l'algorithme donne rapidement de très gros dénominateurs !

Exemples

1. L'algorithme de Fibonacci appliqué à $\dfrac{26}{27}$ donne une autre décomposition de longueur 4 que celle déjà mentionnée :

$$\frac{26}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{216}.$$

2. $\dfrac{6}{169}$ se décompose aussi en quatre termes par l'algorithme de Fibonacci avec

$$a_1 = 29, \quad a_2 = 981, \quad a_3 = 1\ 201\ 971, \quad \text{et} \quad a_4 = 1\ 926\ 311\ 177\ 817.$$

Mais ce même rationnel possède une décomposition à trois termes : au lieu de prendre $a_1 = 29$ choisissons la premier multiple de 13 supérieur à 29, soit 39 :

$$\frac{6}{169} - \frac{1}{39} = \frac{5}{3.13^2} = \frac{5}{507}.$$

Comme $3.13^2 = 13.(1.39) = 3.(1.169)$, l'application de la Proposition 2 à $\dfrac{5}{507}$ nous fournit

$$\frac{6}{169} = \frac{1}{39} + \frac{1}{104} + \frac{1}{4\ 056} = \frac{1}{39} + \frac{1}{102} + \frac{1}{17\ 238}.$$

3. Pour illustrer la voracité de l'algorithme de Fibonacci, regardons $\frac{7}{253}$. Nous obtenons une décomposition de longueur 7 avec

$$a_1 = 37, \quad a_2 = 1\ 561, \quad a_3 = 2\ 922\ 505, \quad a_4 = 10\ 676\ 291\ 421\ 277,$$

$$a_5 = 151\ 977\ 598\ 016\ 143\ 292\ 993\ 029,$$

$$a_6 = 34\ 645\ 448\ 109\ 552\ 248\ 812\ 744\ 856\ 448\ 921\ 392\ 170\ 270\ 899\ 233 \text{ et}$$

$$a_7 > 2.10^{100}.$$

Mais, comme $253 = 11.23$, le choix, pour a_1, du premier entier multiple de 11 supérieur à 39, i.e. $a_1 = 44$ et l'application de la Proposition 2 donne aussi

$$\frac{7}{253} = \frac{1}{44}+\frac{1}{276}+\frac{1}{759} = \frac{1}{44}+\frac{1}{220}+\frac{1}{2530} = \frac{1}{44}+\frac{1}{253}+\frac{1}{1012} = \frac{1}{44}+\frac{1}{204}+\frac{1}{25806}.$$

Question

Le numérateur p étant donné, comment choisir q pour que l'algorithme de Fibonacci aboutisse à une décomposition de longueur p ? Voici un début de réponse :

- ▶ $p = 3$, $q = 1$ mod. 6
- ▶ $p = 4$, $q = 1$ ou 17 mod. 24
- ▶ $p = 5$, $q = 1$ mod. 30
- ▶ $p = 6$, $q = 1$ ou 109 mod. 180
- ▶ $p = 7$, $q = 1$, 253, 281 ou 533 mod. 630

Il semble difficile de dégager un critère général en fonction de p.

Proposition 3 (Algorithme d'Engel)

Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel de $]0,1[$. Il existe une suite finie croissante d'entiers strictement positifs $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ avec $n \leqslant p$ telle que

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} = \sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}.$$

Exemples

1. Avec $\dfrac{26}{27}$, l'algorithme d'Engel donne les valeurs

j	a_j	p_j
1	2	25
2	2	23
3	2	19
4	2	11
5	3	6
6	5	3
7	9	0

soit encore

$$\frac{26}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \frac{1}{240} + \frac{1}{2160}.$$

Cet exemple montre que, en terme de longueur, l'algorithme d'Engel n'est pas nécessairement plus économique que celui de Fibonacci.

2. Pour $\dfrac{6}{169}$, l'algorithme d'Engel donne $a_1 = 29$ et $p_1 = 5$, $a_2 = 34$ et $p_1 = 1$ et $a_3 = 169$ ce qui donne un nouveau développement de longueur 3

$$\frac{6}{169} = \frac{1}{29} + \frac{1}{986} + \frac{1}{166\,634}.$$

Remarque

En appliquant la Proposition 2 à $\dfrac{6}{169} - \dfrac{1}{29} = \dfrac{5}{13^2.29}$, on montre que $\dfrac{6}{169}$ admet exactement deux décompositions égyptiennes de longueur 3 commençant par $\dfrac{1}{29}$: outre la précédente, on a également

$$\frac{6}{169} = \frac{1}{29} + \frac{1}{1014} + \frac{1}{29\,406}.$$

3. Pour $\dfrac{7}{253}$ la méthode d'Engel est beaucoup plus « économique » que l'algorithme de Fibonacci. :

i	a	p
1	37	6
2	43	5
3	51	2
4	127	1
5	253	0

ce qui nous donne la décomposition

$$\frac{7}{253} = \frac{1}{37} + \frac{1}{1591} + \frac{1}{81\ 141} + \frac{1}{10\ 304\ 907} + \frac{1}{2\ 607\ 141\ 471}.$$

Remarque

On peut s'assurer de ce que si $q = a.p! + 1$ ($a \in \mathbb{N}^*$), l'algorithme d'Engel donne une décomposition à p termes pour $\frac{p}{q}$.

On peut ajouter que, si $r_n := \frac{n}{n! + 1}$ n'admet pas de décomposition égyptienne de longueur 2 si $n \leqslant 8$, on a en revanche

$$r_9 = \frac{9}{362\ 881} = \frac{9}{19.71.269} = \frac{1}{40\ 888} + \frac{1}{2\ 903\ 048} = \frac{1}{43\ 168} + \frac{1}{611\ 168} =$$

$$= \frac{1}{51\ 110} + \frac{1}{190\ 990} = \frac{1}{40\,470} + \frac{1}{10\,886\,430} = \frac{1}{40\,350} + \frac{1}{54\,432\,150}.$$

Je ne sais pas s'il existe d'autres valeurs de n pour lesquelles r_n admette une décomposition de longueur 2.

Deux résultats et trois conjectures

1. La suite de Sylvester est définie par : $s_1 = 2$ et, pour $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} s_k + 1$.

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 43, \quad a_5 = 1807 \quad a_6 = 3\,263\,443 \quad \text{etc...}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k} = 1 - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$.

Cette suite permet de répondre à la question suivante : un entier n étant donné, existe-t-il des rationnels de $]0, 1[$ dont *toute* décomposition égyptienne contient au moins $n + 1$ termes ?

La réponse à cette question est apportée par le résultat difficile suivant :

Théorème

Soient n un entier strictement positif et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k}.$$

En conséquence : si $1 - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1} < r < 1$, tout décomposition égyptienne du rationnel r exige au moins $n + 1$ termes.

2. Un rationnel r de $]0, 1[$ étant, la *longueur minimale d'un développement égyptien de r* peut se définir comme étant le plus petit entier n pour lequel il existe une suite strictement croissante d'entiers $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$r = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Nous la notons $L(r)$. Paul Erdős est, semble-t-il le premier à avoir apporté, en 1950, un résultat à savoir qu'il existe une constante M telle que pour tout rationnel $\dfrac{a}{b}$

$$L\Big(\frac{a}{b}\Big) \leqslant M.\frac{\ln b}{\ln(\ln b)}.$$

Ce résultat a été amélioré en 1985 par Michael J. Vose qui a montré l'existence d'une constante M' telle que

$$L\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant M'\sqrt{\ln b}.$$

Je précise que, à ma connaissance, rien n'est dit sur les valeurs respectives des constantes en question.

Nous avons pu énoncer une CNS pour qu'un rationnel admette une décomposition de longueur 2. Il n'existe rien de semblable pour la longueur 3. Trois conjectures encore ouvertes aujourd'hui :

▶ La conjecture d'Erdős-Straus formulée en 1948 : *Pour tout* $n \geqslant 5$, *il existe un triplet d'entiers* (a, b, c) *d'entiers strictement positifs non nécessairement distincts tel que*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

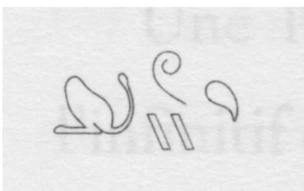
Actuellement, on sait ce résultat vrai, d'une part pour tout $n \leqslant 10^{17}$ et, d'autre part, pour tout n premier différent de 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2 et 23^2 mod. 840.

▶ La conjecture de Sierpiński émise en 1956 : *Pour tout entier* $n \geqslant 6$, *il existe un triplet d'entiers strictement positifs* (u, v, w) *non nécessairement distincts tel que*

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}.$$

▶ Enfin, en quelque sorte une généralisation des deux précédentes, la conjecture de Schinzel, un élève de Sierpiński : *Pour tout entier* $k > 0$, *il existe un entier* N_k *tel que, pour tout* $n \geqslant N_k$, *il existe un triplet* (x, y, z) *d'entier strictement positifs non nécessairement distincts, tel que*

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$



... autrement dit : Fin.